МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ «РОСТОВСКИЙ-НА-ДОНУ КОЛЛЕДЖ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ, ИНФОРМАЦИОННЫХ И ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»
(ГБПОУ РО «РКРИПТ»)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

по дисциплине

ОП.01 Математические методы решения типовых прикладных задач

для специальности

11.02.17 Разработка электронных устройств и систем.

Квалификация выпускника:
техник

Форма обучения: очная

Ростов-на-Дону
2023

СОГЛАСОВАНО
Начальник методического отдела
____________ Н.В. Вострякова
(подпись)
«_28_» _апреля_ 2023г.

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора
по учебно-методической работе
____________ С.А. Будасова
(подпись)
«_28_» _апреля_ 2023г.

ОДОБРЕНО
Цикловой комиссией физико-математических и общих естественнонаучных дисциплин

Протокол № _7_ от «_22_» _марта_ 2023г.
Председатель ЦК
____________ О.Б. Петрикина

Методические указания по выполнению практических работ разработаны в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины ОП.01 Математические методы решения типовых прикладных задач для специальности 11.02.17 Разработка электронных устройств и систем.

Разработчик(и):
Сельцина Н.В. – преподаватель высшей квалификационной категории ГБПОУ РО «РКРИПТ»

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Лабораторные и практические занятия по учебной дисциплине ОП.01 «Математические методы решения типовых прикладных задач» составляют важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки и направлены на подтверждение теоретических положений и формирование практических умений и практического опыта.

Лабораторные и практические занятия относятся к основным видам учебных занятий.

Выполнение студентами лабораторных и практических работ направлено:

- на обобщение, систематизацию, углубление, закрепление полученных теоретических знаний по конкретным темам дисциплин;
- формирование умений применять полученные знания на практике;
- реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- развитие интеллектуальных умений (аналитических, проектировочных, конструкторских и др.) у будущих специалистов;
- выработку при решении поставленных задач таких профессионально значимых качеств, как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Ведущей дидактической целью лабораторных занятий является экспериментальное подтверждение и проверка существенных теоретических положений.

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование практических умений – профессиональных или учебных, необходимых в последующей учебной деятельности.

Содержанием лабораторных работ по дисциплине является наблюдение развития явлений, и процессов. В ходе выполнения заданий у студентов формируются практические умения и навыки обращения с приборами, установками, лабораторным оборудованием, аппаратурой, которые могут составлять часть профессиональной практической подготовки, а также исследовательские умения (наблюдать, сравнивать, анализировать, устанавливать зависимости, делать выводы и обобщения, самостоятельно вести исследование, оформлять результаты).

Содержанием практических занятий по дисциплине являются решение разного рода задач, в том числе профессиональных выполнение вычислений, расчетов.

Содержание практических, лабораторных занятий охватывают весь круг профессиональных умений, на подготовку к которым ориентирована данная дисциплина, которые в дальнейшем закрепляются и совершенствуются в процессе курсового проектирования, практикой по профилю специальности и преддипломной практикой.

Лабораторные занятия проводятся в специально оборудованных учебных лабораториях. Практическое занятие должно проводиться в учебных кабинетах или специально оборудованных помещениях (площадках). Продолжительность занятия – не менее 2-х академических часов. Необходимыми структурными элементами занятия, помимо самостоятельной деятельности студентов, являются инструктаж, проводимый преподавателем, а также организация обсуждения итогов выполнения работы.

Все студенты, связанные с работой в лаборатории, обязаны пройти инструктаж по безопасному выполнению работ, о чем расписываются в журнале инструктажа по технике безопасности.

Выполнению лабораторных и практических работ предшествует проверка знаний студентов, их теоретической готовности к выполнению задания.

Лабораторные и практические работы студенты выполняют под руководством преподавателя. При проведении лабораторных и практических занятий учебная группа может делиться на подгруппы численностью не менее 8 человек. Объем заданий для лабораторных и практических занятий спланирован с расчетом, чтобы за отведенное время они могли быть выполнены качественно большинством студентов.

Формы организации работы обучающихся на лабораторных работах и практических занятиях: фронтальная, групповая и индивидуальная.

При фронтальной форме организации занятий все студенты выполняют одновременно одну и ту же работу. При групповой форме организации занятий одна и та же работа выполняется бригадами по 2 - 5 человек. При индивидуальной форме организации занятий каждый студент выполняет индивидуальное задание.

Отчет по практической и лабораторной работе представляется в печатном виде в формате, предусмотренном шаблоном отчета по практической, лабораторной работе. Защита отчета проходит в форме доклада обучающегося по выполненной работе и ответов на вопросы преподавателя.

Оценки за выполнение лабораторных работ и практических занятий могут выставляться по пятибалльной системе или в форме зачета и учитываться как показатели текущей успеваемости студентов.

Критерии оценки лабораторных, практических работ.

Оценка «5» ставится, если учащийся выполняет работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности проведения опытов и измерений; самостоятельно и рационально монтирует необходимое оборудование; все опыты проводит в условиях и режимах, обеспечивающих получение правильных результатов и выводов; соблюдает требования правил безопасности труда; в отчете правильно и аккуратно выполняет все записи, таблицы, рисунки, чертежи, графики, вычисления; правильно выполняет анализ полученных результатов.

Оценка «4» ставится, если выполнены требования к оценке «5», но было допущено два - три недочета, не более одной негрубой ошибки и одного недочёта.

Оценка «3» ставится, если работа выполнена в ходе проведения опыта и измерений были допущены грубые ошибки.

Оценка «2» ставится, если работа выполнена не полностью и объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов: если опыты, измерения, вычисления, наблюдения производились неправильно.

Практическая работа №1

Тема: «Действия над комплексными числами в алгебраической форме. Геометрическое изображение комплексного числа. Модуль и аргумент комплексного числа».

Цель работы: отработать действия с комплексными числами в алгебраической форме. Научиться находить модуль и аргумент комплексного числа.

1. **Краткие теоретические сведения.**

$z = a + ib -$ алгебраическая форма комплексного числа.

$z_1 = a_1 + ib_1$; $z_2 = a_2 + ib_2$

Действия над числами в алгебраической форме:

1) $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$

2) $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$

3) $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) * (a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$

4) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2} = \frac{(a_1+ib_1)(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)(a_2-ib_2)} = \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+i(a_2b_1-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}$

$z = a + ib$

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ – модуль комплексного числа.

$tg\,\varphi = \frac{b}{a}$, $\varphi = arctg\frac{b}{a}$ – аргумент комплексного числа.

2. **Методика решения типовых задач.**

1. Дано: $z_1 = 4 + 3i$; $z_2 = 2 - i$

Вычислить: $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 * z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$

Решение:

$z_1 + z_2 = 4 + 3i + 2 - i = 6 + 2i$я

$z_1 - z_2 = 4 + 3i - (2 - i) = 4 + 3i - 2 + i = 2 + 4i$

$z_1 * z_2 = (4 + 3i) * (2 - i) = 8 - 4i + 6i - 3i^2 = 11 + 2i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4+3i}{2-i} = \frac{(4+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{8+4i+6i+3i^2}{4-i^2} = \frac{5+10i}{5} = 1 + 2i$$

2. Найти модуль и аргумент $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

$a = -\sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$

$r = \sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$ – модуль

$tg\,\varphi = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -1 \rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{4}$, $\varphi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$ (т.к. число находится во второй четверти)

3. Решить уравнение на множестве комплексных чисел.

$x^2 - 2x + 2 = 0$

$D = 4 - 4 * 2 = -4 = 4i^2$

$x_1 = \frac{2+2i}{2} = 1 + i$ и $x_2 = \frac{2-2i}{2} = 1 - i$

3. Порядок выполнения практической работы

3.1 Изучить краткие теоретические сведения.

3.2 Решить задания своего варианта (Приложение)

3.3 Ответить на контрольные вопросы

4. Содержание отчёта

4.1 Тема и цель работы.

4.2 Решение заданий.

4.3 Ответы на контрольные вопросы.

5.Контрольные вопросы

5.1 Дайте определение комплексного числа.

5.2 Что называется мнимой единицей?

5.3 Как записывают комплексное число в алгебраической форме?

5.4 Как выполняют сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел в алгебраической форме записи?

5.5 Как геометрически изображают комплексное число?

5.6 Что называется модулем и аргументом комплексного числа? Запишите формулу вычисления модуля и аргумента.

6.Список справочной литературы

6.1 Богомолов Н.В., Самойленко П.И. Математика, Учебник. - М: Дрофа, 2016-395с.

6.2 Конспект теоретических занятий.

Задания для практической работы.

Вариант 1

Вариант 2

1. Вычислить $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $3z_1 + 2z_2$.

$z_1 = 5 + 3i$

$z_1 = 8 - 2i$

$z_2 = 2 - 2i$

$z_2 = 3 + i$

2. Вычислить $Z_1 * Z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$.

$z_1 = 4 - 5i$
$z_1 = 6 + i$
$z_2 = 3 + 2i$
$z_2 = 2 - 2i$

3. Вычислить:
$\frac{(1-2i)(2+i)}{3-2i}$ $\frac{2+3i}{(4+i)(2-2i)}$

4. Решить уравнение на множестве комплексных чисел:

1) $x^2 - 2x + 5 = 0$
1) $5x^2 + 2x + 2 = 0$
2) $36x^2 + 36x + 13 = 0$
2) $x^2 - 6x + 16 = 0$

5. Найти модуль и аргумент:

1) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
1) $z = -2 - 2i$
2) $z = -\sqrt{3} + i$
2) $z = 4 - 4\sqrt{3}\, i$

Вариант 3
Вариант 4

1. Вычислить $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $5z_1 + 2z_2$.

$z_1 = 6 - 4i$
$z_1 = 12 + 5i$
$z_2 = 10 + 3i$
$z_2 = 4 - 2i$

2. Вычислить $Z_1 * Z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$

$z_1 = -3 + 4i$
$z_1 = 8 - 5i$
$z_2 = 6 + 2i$
$z_2 = 2 + 2i$

3. Вычислить:

$\frac{5+2i}{2-5i} - \frac{3-4i}{4+3i}$
$\frac{7-3i}{3+7i} + \frac{1+i}{1-i}$

4. Решить уравнение на множестве комплексных чисел:

1) $x^2 + 2x + 2 = 0$

1) $x^2 + 16 = 0$

2) $5x^2 + 6x + 5 = 0$

2) $3x^2 - 14x + \frac{218}{3} = 0$

5. Найти модуль и аргумент:

1) $z = 2 + 2i$

1) $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

2) $z = \sqrt{3} - i$

2) $z = 1 - i$

Практическая работа №2

Тема: «Тригонометрическая форма комплексного числа. Действия над числами в тригонометрической форме»

Цель работы: научиться выполнять действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

1. **Краткие теоретические сведения.**

Геометрическое изображение комплексного числа.

Комплексное число $z = x + iy$, изображают на координатной плоскости в виде радиус-вектора, конец которого имеет координаты $(x; y)$

Длина радиус-вектора называется **модулем комплексного числа,** обозначается r и вычисляется по формуле:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Угол, который радиус-вектор, изображающий комплексное число, образует с положительным направлением оси OX, называется **аргументом комплексного числа** и обозначается φ.

Аргумент комплексного числа удобно определять с помощью следующей таблицы:

Четверть, в которой находится радиус-вектор, изображающий комплексное число	Формула для определения аргумента
I	$\varphi = \varphi_0$

II, III	$\varphi = \varphi_0 + \pi$
IV	$\varphi = \varphi_0 + 2\pi$

где φ_0 определяют по формуле:

$$\varphi_0 = arctg\,\frac{y}{x}.$$

Тригонометрическая форма записи комплексного числа:

$$z = r(\sin\varphi + i\sin\varphi)$$

Показательная форма записи комплексного числа:

$$z = r \cdot e^{i\varphi}$$

Действия с комплексными числами в тригонометрической и показательной формах записи:

Действие	**Тригонометрическая форма записи** $z_1 = r_1(\sin\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ $z_2 = r_2(\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$	**Показательная форма записи** $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$ $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$
Умножение	$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$	$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
Деление	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$
Возведение в целую степень	$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$	$z^n = r^n e^{in\varphi}$
Извлечение корня n-ой степени	$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$ $k = 0 \div (n-1)$	$z_k = \sqrt[n]{r}e^{i\cdot\frac{\varphi + 2\pi k}{n}},$ $k = 0 \div (n-1)$

2. Методика решения типовых задач

2.1 Пример 1. Выполнить действия в алгебраической форме

$$\frac{(7-5i)(6+7i)}{(1-3i)+(3-i)}.$$

Решение. В числителе дроби раскроем скобки, а в знаменателе выполним сложение комплексных чисел, сложив соответственно действительные и мнимые части:

$$\frac{(7-5i)(6+7i)}{(1-3i)+(3-i)}=\frac{42+49i-30i-35i^2}{4-4i}=\frac{42+35+19i}{4-4i}=\frac{77+19i}{4-4i}.$$

Умножим теперь числитель и знаменатель дроби на выражение $4+4i$, сопряжённое знаменателю:

$$\frac{(77+19i)\cdot(4+4i)}{(4-4i)\cdot(4+4i)}=\frac{308+308i+76i+76i^2}{16-16i^2}=\frac{234+384i}{32}=\frac{117}{16}+12i.$$

2.2 Пример 2. Даны числа $z_1=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad z_2=-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}i$. Выполнить в тригонометрической форме записи $z_1\cdot z_2,\quad \sqrt[3]{z_1}$.

Решение. Найдём модули и аргументы чисел z_1 и z_2:

$$r_1=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1.$$

$$r_2=\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Радиус-вектор, изображающий число z_1 находится в IV четверти, поэтому аргумент числа z_1 находим по формуле

$$\varphi_1=\varphi_0+2\pi=arctg\,\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}+2\pi=-arctg\sqrt{3}+2\pi=-\frac{\pi}{3}+2\pi=\frac{5\pi}{3}$$

Радиус-вектор, изображающий число z_2 находится в III четверти, поэтому аргумент числа z_2 находим по формуле

$$\varphi_2 = \varphi_0 + 2\pi = arctg\,\frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}} + \pi = arctg1 + \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$$

Запишем числа z_1 и z_2 в тригонометрической и показательной формах:

$$z_1 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3},\; z_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$z_1 = e^{\frac{5\pi}{3}i},\quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{\frac{5\pi}{4}i}.$$

Найдём $z_1 \cdot z_2$ (см. таблицу):

$$z_1 z_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{5\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{35\pi}{12} + i\sin\frac{35i}{12}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$$

Найдём $\sqrt[3]{z_1}$ (см. таблицу):

$$k = 0,\qquad z_{1,0} = \cos\frac{5\pi}{9} + i\sin\frac{5\pi}{9}$$

$$k = 1,\qquad z_{1,1} = \cos\frac{\frac{5\pi}{3} + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{5\pi}{3} + 2\pi}{3} = \cos\frac{11\pi}{9} + i\sin\frac{11\pi}{9}$$

$$k = 2,\qquad z_{1,2} = \cos\frac{\frac{5\pi}{3} + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{5\pi}{3} + 4\pi}{3} = \cos\frac{17\pi}{9} + i\sin\frac{17\pi}{9}$$

3. Порядок выполнения практической работы

3.1 Изучить краткие теоретические сведения.
3.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
3.3 Ответить на контрольные вопросы

4. Содержание отчёта

4.1 Тема и цель работы.
4.3 Решение заданий.
4.3 Ответы на контрольные вопросы.

5.Контрольные вопросы

5.1 Дайте определение комплексного числа.
5.2 Что называется мнимой единицей?
5.3 Как записывают комплексное число в алгебраической форме?
5.4 Как выполняют сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел в алгебраической форме записи?
5.5 Как геометрически изображают комплексное число?
5.6 Что называется модулем и аргументом комплексного числа? Запишите формулу вычисления модуля и аргумента.
5.7 Как записывают комплексное число в тригонометрической форме, в показательной форме?
5.8 Как выполняют умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня целой степени в тригонометрической и показательной формах записи (запишите формулы)?

6.Список справочной литературы

6.1 Дадаян А.А. Математика: Учебник для СПО.- М.: Инфра-М, 2019.- 544с.
6.2 Дадаян А.А. Сборник задач по математике: Учебное пособие для СПО / А.А. Дадаян.- М.: Форум, 2018.- 352с.
6.3 Конспект теоретических занятий.

<u>Задания для практической работы.</u>

<u>Вариант 1</u>	<u>Вариант 2</u>

1. Записать число в тригонометрической форме.

Вариант 1	Вариант 2
1) $Z = \sqrt{3}$-i	1) $Z = \sqrt{2}$+i
2) $Z = \frac{8+2i}{5-3i}$	2) $Z = \frac{5+i}{2-3i}$

2. Выполнить действия $Z_1 * Z_2; \frac{Z_1}{Z_2}$.

Вариант 1	Вариант 2
1)$Z_1 = 3(cos\frac{\pi}{8} + isin\frac{\pi}{8})$	1)$Z_1 = 2(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3})$
2) $Z_2 = 2(cos\frac{5\pi}{24} + isin\frac{5\pi}{24})$	2) $Z_2 = 5(cos(-\frac{\pi}{4}) + isin(-\frac{\pi}{4}))$

3. Возвести в степень по формуле Муавра.

$(-1+i\sqrt{3})^9$ $\qquad$ $(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^6$

4. Извлеките корень.

$\sqrt{2+2\sqrt{3}i}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{8}$

<u>Вариант 3</u> <u>Вариант 4</u>

1.Записать число в тригонометрической форме.

1) $Z = 1+\sqrt{3}i$ $\qquad$ 1) $Z = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

2) $Z = \frac{1}{1-i}$ $\qquad$ 2) $Z = \frac{3i-1}{2i+1}$

2. Выполнить действия $Z_1 * Z_2; \frac{Z_1}{Z_2}$.

1)$Z_1 = 4(cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3})$ $\qquad$ 1)$Z_1 = 8(cos\frac{5\pi}{6} + isin\frac{5\pi}{6})$

2) $Z_2 = 2(cos(-\frac{\pi}{2}) + isin(-\frac{\pi}{2}))$ $\qquad$ 2) $Z_2 = 4(cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3})$

3. Возвести в степень по формуле Муавра.

$(-1-i)^{12}$ $\qquad$ $(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)^6$

4. Извлеките корень.

$\sqrt[4]{-2+2\sqrt{3}i}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{-1}$

Практическая работа №3

Тема: «Показательная форма комплексного числа. Действия над числами в показательной форме.»

Цель работы: научиться выполнять действия над комплексными числами в показательной форме.

1. Краткие теоретические сведения.

$z = r \cdot e^{\varphi i}$ - Показательная формула комплексного числа.

Действия над числами в показательной форме:

$z_1 = r_1 \cdot e^{\varphi_1 i}$ и $z_2 = r_2 \cdot e^{\varphi_2 i}$

1) $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{(\varphi_1+\varphi_2)i}$

2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} \cdot e^{(\varphi_1-\varphi_2)i}$

3) $z^n = r^n \cdot e^{\varphi \cdot ni}$

4) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n} i}$, где K=0, … *n*-1

2. Методика решения типовых задач:

$z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - \sqrt{3} \cdot i$

Вычислить в показательной форме:

1) $z_1 \cdot z_2$ 2) $\dfrac{z_1}{z_2}$ 3) z_1^6 4) $\sqrt[4]{z_1}$

Решение:

$z_1 = 1 + i$ a=1, b=1

$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$; $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{1} = 1$; $\varphi = \frac{\pi}{4}$

$z_1 = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4}i}$ - Показательная форма.

$z_2 = 1 - \sqrt{3} \cdot i$ a=1, b= $-\sqrt{3}$

$r = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$; $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$; $\varphi = -\frac{\pi}{3}$

$z_2 = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$ - Показательная форма.

1) $z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4}i} \cdot 2e^{-\frac{\pi}{3}i} = 2\sqrt{2} \cdot e^{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)i} = 2\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{\pi}{12}i}$

2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}\cdot e^{\frac{\pi}{4}i}}{2e^{-\frac{\pi}{3}i}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)i} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{7\pi}{12}i}$

3) $z_1^6 = \left(\sqrt{2}\right)^6 \cdot e^{\frac{\pi}{4}\cdot 6i} = 8e^{\frac{3\pi}{2}i}$

4) $\sqrt[4]{z_1} = \sqrt[8]{2}\cdot e^{\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{4}i}$, где k=0,1,2,3.

K=0 $\sqrt[4]{z_1} = \sqrt[8]{2}\cdot e^{\frac{\pi}{16}i}$

K=1 $\sqrt[4]{z_1} = \sqrt[8]{2}\cdot e^{\frac{9\pi}{16}i}$

K=2 $\sqrt[4]{z_1} = \sqrt[8]{2}\cdot e^{\frac{17\pi}{16}i}$

K=3 $\sqrt[4]{z_1} = \sqrt[8]{2}\cdot e^{\frac{25\pi}{16}i}$

3. Порядок выполнения практической работы

3.1 Изучить краткие теоретические сведения.
3.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
3.3 Ответить на контрольные вопросы

4. Содержание отчёта

4.1 Тема и цель работы.
4.4 Решение заданий.

4.3 Ответы на контрольные вопросы.

5.Контрольные вопросы

5.1 Дайте определение комплексного числа.
5.2 Что называется мнимой единицей?
5.3 Как записывают комплексное число в алгебраической форме?
5.4 Как выполняют сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел в алгебраической форме записи?
5.5 Как геометрически изображают комплексное число?
5.6 Что называется модулем и аргументом комплексного числа? Запишите формулу вычисления модуля и аргумента.
5.7 Как записывают комплексное число в тригонометрической форме, в показательной форме?
5.8 Как выполняют умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня целой степени в показательной форме (запишите формулы)?

6.Список справочной литературы

6.1 Дадаян А.А. Математика: Учебник для СПО.- М.: Инфра-М, 2019.- 544с.
6.3 Дадаян А.А. Сборник задач по математике: Учебное пособие для СПО / А.А. Дадаян.- М.: Форум, 2018.- 352с.

6.3 Конспект теоретических занятий.

Задание для практической работы:

Представить числа в показательной форме и вычислить:

1) $z_1 \cdot z_2$ **2)** $\dfrac{z_2}{z_1}$ **3)** z_1^3 **4)** z_2^4 **5)** $\sqrt[3]{z_1}$ **6)** $\sqrt[4]{z_2}$

Вариант 1

$$z_1 = \sqrt{3} + i$$

$$z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot i$$

Вариант 2

$$z_1 = 1 - \sqrt{3} \cdot i$$
$$z_2 = 2 + 2i$$

Вариант 3

$$z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{6} \cdot i$$
$$z_2 = 1 + i$$

Вариант 4

$$z_1 = -2 - 2\sqrt{3} \cdot i$$
$$z_2 = -1 + i$$

Практическое занятие №4

Тема: Правила дифференцирования. Производные основных элементарных функций. Производная сложной функции. Дифференцирование функций.

Цель работы: получить практические навыки нахождения производных различных функций

1. Краткие теоретические сведения

Производной функции $y = y(x)$ называется предел отношения приращения функции (Δy) к приращению аргумента (Δx), когда приращение аргумента стремится к нулю.

y' - обозначение производной функции $y = y(x)$.

Согласно определению

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Основные правила дифференцирования:

1. ***Производная постоянной величины.***

$$C' = 0.$$

2. ***Производная суммы***

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

3. ***Производная произведения.***

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Следствие.

$$(cu)' = cu'.$$

4. ***Производная частного***.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

5. **Производная сложной функции**

Сложной называется функция, у которой аргумент также является функцией. Символически сложную функцию обозначают

$$y = y(f(x)),$$

где $f(x)$ - промежуточный аргумент сложной функции y.

При нахождении производной сложной функции используют ***правило дифференцирования сложной функции*** и ***таблицей производных сложных функций.***

Правило дифференцирования сложной функции

$$y' = y_f' \cdot f_x'$$

Практическое правило: чтобы найти производную сложной функции её надо продифференцировать как простую, сохраняя аргумент и результат умножить на производную этого аргумента.

6. Таблица производных элементарных функций.

1. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$, в частности $x' = 1$, $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $(kx + b)' = k$.
2. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$, в частности $\left(e^x\right)' = e^x$.
3. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, в частности $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
4. $(\sin x)' = \cos x$.
5. $(\cos x)' = -\sin x$.
6. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

7. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

8. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

9. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

10. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

11. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

7. Таблица производных сложных функций

1. $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$, в частности $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$,

$\left((ax+b)^n\right)' = an(ax+b)^{n-1}$

2. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, в частности $(e^u)' = e^u \cdot u'$.

3. $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}$, в частности $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

4. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.

5. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.

6. $(tgu)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

7. $(ctgu)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$.

8. $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

9. $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

10. $(arctgu)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

11. $(arcctgu)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

2. Методика решения типовых задач

2.1 Пример 1. Найти производную функции $y = 5x^3 - 3x^2 + \ln x$.

Решение. Применим последовательно правила дифференцирования производная суммы нескольких функций, вынесение постоянного множителя за знак производной и формулы из таблицы производных 2 и 4, получим:

$$y' = \left(5x^3 - 3x^2 + \ln x\right)' = 5\left(x^3\right)' - 3\left(x^2\right)' + \left(\ln x\right)' = 5\cdot 3x^{3-1} - 3\cdot 2x^{2-1} + \frac{1}{x} = .$$

$$= 15x^2 - 6x + \frac{1}{x}.$$

Пример 2. Найти производную функции $y = \sqrt{x} - \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x^2}$.

Решение. Представим каждое слагаемое в правой части уравнения функции в виде степени:

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{-\frac{2}{3}}, \quad \frac{1}{x^2} = x^{-2},$$

тогда

$$y' = \left(\sqrt{x} - \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x^2}\right)' =$$

$$\left(x^{\frac{1}{2}} - 5x^{-\frac{2}{3}} - x^{-2}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} - 5\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{2}{3}-1} - (-2)x^{-2-1} = ,$$

$$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{10}{3}x^{-\frac{4}{3}} + 2x^{-3}$$

2.2 Пример 3. Найти производную функции $y = e^x \cdot arctgx$.

Решение. Применим правило дифференцирования производная частного, получим:

$$y' = \left(e^x \cdot arctgx\right)' = \left(e^x\right)' \cdot arctgx + e^x \cdot \left(arctgx\right)' = e^x \cdot arctgx + e^x \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

2.3 Пример 4. Найти производную функции $y = \frac{\cos x}{9^x - 3x^2}$.

Решение. Применим правило дифференцирования производная частного:

$$y' = \left(\frac{\cos x}{9^x - 3x^2}\right)' = \frac{\left(\cos x\right)' \cdot \left(9^x - 3x^2\right) - \cos x \cdot \left(9^x - 3x^2\right)'}{\left(9^x - 3x^2\right)^2} = .$$

$$= \frac{-\sin x \cdot \left(9^x - 3x^2\right) - \cos x \cdot \left(9^x \ln x - 6x\right)}{\left(9^x - 3x^2\right)^2}$$

2.4 Пример 5. Найти производную функции $y = \sin^3 x$

Решение. Продифференцируем данную функцию как степенную с промежуточным аргументом $\sin x$, получим:

$$y' = 3\sin^2 x \cdot \left(\sin x\right)' = 3\sin^2 x \cdot \cos x.$$

Пример 6. Найти производную функции $y = \ln\cos x$.

Решение. Продифференцируем данную функцию как логарифмическую с промежуточным аргументом $\cos x$, получим:

$$y' = \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' = \frac{-\sin x}{\cos x} = -tgx.$$

Пример 7. Найти производную функции $y = \ln\sin\frac{x+2}{x}$.

Решение. Продифференцируем данную функцию как сложный логарифм, аргументом которого также является сложная функция синус:

$$y' = \left(\ln\sin\frac{x+2}{x}\right)' = \frac{1}{\sin\frac{x+2}{x}} \cdot \left(\sin\frac{x+2}{x}\right)' = \frac{1}{\sin\frac{x+2}{x}} \cdot \cos\frac{x+2}{x} \cdot \left(\frac{x+2}{x}\right)' =$$

$$= ctg\,\frac{x+2}{x} \cdot \frac{(x+2)' \cdot x - (x+2) \cdot x'}{x^2} = ctg\,\frac{x+2}{x} \cdot \frac{x - x - 2}{x^2} = -\frac{2}{x^2}\,ctg\,\frac{x+2}{x}.$$

3. Порядок выполнения практической работы

3.1 Изучить краткие теоретические сведения.
3.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
3.3 Ответить на контрольные вопросы

4. Содержание отчёта

4.1Тема и цель работы.
4.2 Решение заданий.
4.3Ответы на контрольные вопросы.

5.Контрольные вопросы

5.1 Дайте определение производной функцию
5.2 Сформулируйте правила дифференцирования.

6.Список справочной литературы

6.1 Алексеева Е.В. Дифференциальное исчисление функции одной переменной: учебное пособие для студентов 1-го и 2-го курса технических специальностей по разделу дисциплины «Математика»
6.2 Конспект теоретических занятий

ПРИЛОЖЕНИЕ

Найти производные следующих функций:

ВАРИАНТ №1	ВАРИАНТ №2
№1. $y = 5\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{3}{x^3} - \frac{4}{x}$	№1 $y = 6x^2 - \frac{5}{x^3} - \sqrt[3]{x^4} + \frac{9}{\sqrt{x}}$

№2. $y = arctgx \cdot \ln 2x$ №3. $y = \dfrac{\cos 8x}{ctgx + 3x^2}$ №4. $y = \left(5x^2 + e^{3x}\right) \cdot arcctgx$ №5 $y = \ln \dfrac{1 + \sin 3x}{1 - \sin 3x}$	№2 $y = e^{-2x} \cdot \ln(3x + 4)$ №3. $y = \dfrac{x - \sin 4x}{\sqrt{x}}$ №4. $y = arctg\,6x \cdot \left(e^{tgx} + 2\right)$ №5. $y = \cos \ln\left(2x - x^2\right)$
ВАРИАНТ №3	**ВАРИАНТ №4**
№1. $y = 2\sqrt[4]{x} + 9x^2 - 5\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{7}{x^2}$ №2. $y = \arccos x \cdot e^{-3x}$ №3. $y = \dfrac{tg\,4x}{\sin x + 5x}$ №4. $y = (2 + 3\arcsin 7x) \cdot \left(x^2 + \ln\left(x^2 + 1\right)\right)$ №5. $y = \sin^2 \dfrac{1 - x}{1 + x}$	№1. $y = 5\sqrt{x} + 3\sqrt[4]{x} - \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}$ №2. $y = \ln(2x + 1) \cdot arctgx$ №3. $y = \dfrac{e^{2x} - 3}{\cos x}$ №4. $y = \left(2\arccos 3x + 5x^3\right) \cdot e^{tgx}$ №5. $y = \ln \sin \dfrac{x + 2}{x}$

Практическое занятие №5

Тема: Неопределенный интеграл и его свойства. Нахождение неопределенного интеграла методами непосредственного интегрирования, подстановки и интегрирования по частям.

Цель работы: получить практические навыки нахождения неопределённых интегралов различными способами.

1.Краткие теоретические сведения

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, если для всех значений x из этого промежутка выполняется

$$F'(x) = f(x).$$

Теорема.

Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, то функция

$$F(x)+C,$$

где C - произвольная постоянная, также является первообразной для $f(x)$ на этом же промежутке.

Определение.

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$, определённых на некотором промежутке, называется *неопределённым интегралом* от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается символом

$$\int f(x)dx.$$

Читается: «интеграл от эф от икс де икс».

По определению

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

$f(x)$ - подынтегральная функция,

$f(x)dx$ - подынтегральное выражение,

x - переменная интегрирования,

$\int$ - знак неопределённого интеграла,

С - постоянная величина (константа).

Нахождение неопределённого интеграла по данной подынтегральной функции называется ***интегрированием*** этой функции.

Так как интегрирование представляет собой операцию, обратную дифференцированию, то для того чтобы проверить, правильно ли выполнено интегрирование, достаточно продифференцировать результат и получить при этом подынтегральную функцию.

Основные свойства неопределённого интеграла

1. Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2. Дифференциал неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

3. Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная.

$$\int dF(x) = F(x)+C$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

5. Неопределённый интеграл от алгебраической суммы двух или более функций равен алгебраической сумме интегралов от каждой из этих функций.

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(dx) \pm \int g(x)dx.$$

Таблица простейших интегралов

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, где $n \neq -1$, $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, в частности, $\int e^x dx = e^x + C$

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\qquad \int \sin axdx = -\dfrac{1}{a}\cos ax + C$

5. $\int \cos x dx = \sin x + C$ $\qquad \int \cos axdx = \dfrac{1}{a}\sin ax + C$

6. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

8. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$, $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$

9. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$, $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C$

10. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$.

Интегралы, содержащиеся в данной таблице, называются ***табличными*** интегралами.

Основные методы интегрирования.

Задача интегрирования принципиально труднее задачи дифференцирования. Так, например, таблица интегралов не исчерпывает даже основных элементарных функций, не говоря уже о сложных функциях.

Не существует также правил интегрирования произведения, частного, сложной и обратной функций.

Существуют лишь отдельные методы, позволяющие интегрировать отдельные классы подынтегральных функций, и выбор того или иного метода интегрирования зависит от вида подынтегральной функции.

Непосредственное интегрирование.

Непосредственное интегрирование - это такой способ интегрирования, при котором данный интеграл с помощью различных преобразований подынтегральной функции и свойств неопределённого интеграла сводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Метод замены переменной (способ подстановки).

Найти заданный неопределённый интеграл непосредственным интегрированием удаётся далеко не всегда, а иногда это сопряжено с большими трудностями. В таких случаях применяют другие способы интегрирования.

Одним из наиболее эффективных методов является ***способ подстановки*** или ***замены переменной интегрирования***.

Сущность этого метода заключается в том, что путём введения новой переменной интегрирования удаётся свести заданный интеграл к новому интегралу, который сравнительно лёгко берётся непосредственно.

Алгоритм метода:

Пусть дан интеграл $\int f(x)dx$, который не является табличным.

1. Записываем уравнение замены

$$y = y(x),$$

где $y(x)$ - некоторая функция.

2. Находим дифференциал этой функции

$$dy = y'(x)dx.$$

3. Выражаем

$$dx = \frac{dy}{y'(x)}.$$

4. Подставим y и dy в данный интеграл:

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy.$$

Если замена выполнена правильно, то

$$\int g(y)dy$$

будет табличным.

5. Находим

$$\int g(y)dy = F(y) + C.$$

6. Чтобы получить окончательный ответ, вместо переменной y подставляем выражение $y(x)$:

$$\int f(x)dx = F(y(x)) + C.$$

Интегрирование по частям.

Интегрирование по частям – это, практически, формула интегрирования произведения двух функций.

Хорошо известна формула дифференциала произведения двух функций:

$$d(uv) = udv + vdu$$

Проинтегрировав обе части данного равенства, получим:

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu,$$

т.к.

$$\int d(uv) = uv,$$

то

$$uv = \int udv + \int vdu,$$

Откуда

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Последняя формула называется ***формулой интегрирования по частям***.

Формула интегрирования по частям сводит нахождение интеграла $\int udv$ к отысканию другого интеграла $\int vdu$; её применение целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл либо проще исходного, либо подобен ему.

При этом в качестве u берётся функция, которую проще продифференцировать, а в качестве dv берётся та часть подынтегрального выражения, которую проще проинтегрировать. Иногда формулу интегрирования по частям приходиться использовать несколько раз.

При применении формулы интегрирования по частям интегралы можно разбить на 3 основные группы:

1. В интегралах вида

$$\int P(x)e^{ax}dx, \qquad \int P(x)\sin axdx, \qquad \int P(x)\cos axdx,$$

где $P(x)$ - многочлен переменной x, a - число, полагают

$$u = P(x), \qquad dv = \begin{cases} e^{ax}dx, \\ \sin axdx, \\ \cos axdx \end{cases}$$

2. В интегралах вида

$$\int P(x)\ln xdx, \quad \int P(x)\arcsin xdx, \quad \int P(x)\arccos xdx,$$
$$\int P(x)arctgxdx, \quad \int P(x)arcctgxdx$$

полагают

$$u = \begin{cases} \ln x, \\ \arcsin x, \\ \arccos x, \\ arctgx, \\ arcctgx \end{cases} \qquad dv = P(x)dx$$

3. В интегралах вида

$$\int e^{ax} \sin bxdx, \quad \int e^{ax} \cos bxdx$$

за u принимают любую функцию, за dv соответственно оставшуюся часть подынтегрального выражения.

2. Методика решения типовых задач

2.1 Пример 1. Найти неопределённый интеграл $\int (5x^4 - 4x^2 + 3x - 1)dx$.

Решение. Применим свойство 5:

$$\int (5x^4 - 4x^2 + 3x - 1)dx = \int 5x^4 dx - 4x^2 dx + \int 3xdx - \int dx.$$

В первых трёх интегралах применим свойство 4, в четвёртом - свойство 3, а затем табличный интеграл 1, получим:

$$\int 5x^4 dx - 4x^2 dx + \int 3xdx - \int dx = 5\int x^4 dx - 4\int x^2 dx + 3\int xdx - x =$$

$$= 5 \cdot \frac{x^5}{5} - 4 \cdot \frac{x^3}{3} + 3 \cdot \frac{x^2}{2} - x + C = x^5 - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x + C.$$

Пример 2. Найти неопределённый интеграл $\int \left(5\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}} + 1 \right) dx$.

Решение. Используем свойства 5 и 4, а также преобразуем каждое слагаемое подынтегральной функции в степень, получим:

$$\int \left(5\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}} + 1 \right) dx = 5\int x^{\frac{2}{3}} dx - 3\int x^{-2} dx - 2\int x^{-\frac{4}{3}} dx + \int dx =$$

$$= 5 \cdot \frac{3}{5} \cdot x^{\frac{5}{3}} - 3 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} - 2 \cdot (-3) \cdot x^{-\frac{1}{3}} + x + C = 3\sqrt[3]{x^5} + \frac{3}{x} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}} + x + C.$$

Пример 3. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{3x^4 + 2x^2 - 3x + 7}{x^2} dx$.

Решение. Разделим почленно числитель дроби на знаменатель, получим

$$\int \frac{3x^4 + 2x^2 - 3x + 7}{x^2} dx = \int \left(3x^2 + 2 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2} \right) dx.$$

Применим свойство 5:

$$\int\left(3x^2+2-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}\right)dx=\int 3x^2dx+\int 2dx-\int\frac{3}{x}dx+\int\frac{7}{x^2}dx=$$

$$=3\int x^2dx+2\int dx-3\int\frac{dx}{x}+7\int x^{-2}dx=3\cdot\frac{x^3}{3}+2x-3\ln|x|+7\cdot\frac{x^{-1}}{-1}+C=$$

$$=x^3+2x-3\ln|x|-\frac{7}{x}+C$$

Пример 4. Найти неопределённый интеграл $\int e^x\left(3-\frac{e^{-x}}{2\cos^2 x}\right)dx$.

Решение. Раскроем в подынтегральном выражении скобки и применим табличные интегралы 3 и 6, получим:

$$\int e^x\left(3-\frac{e^{-x}}{2\cos^2 x}\right)dx=3\int e^xdx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\cos^2 x}=3e^x-\frac{1}{2}tgx+C.$$

Пример 5. Найти $\int\frac{dx}{4+3x^2}$.

Решение. Приведём данный интеграл к табличному интегралу 9:

$$\int\frac{dx}{4+3x^2}=\int\frac{dx}{3\left(\frac{4}{3}+x^2\right)}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+x^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}arctg\frac{\sqrt{3}x}{2}+C=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}arctg\frac{\sqrt{3}x}{2}+C.$$

2.2 Пример 1. Найти $\int e^{\frac{x}{2}}dx$.

Решение. Сделаем подстановку $x=2t$, тогда $dx=2tdt$. Следовательно,

$$\int e^{\frac{x}{2}}dx=\int e^t\cdot 2dt=2\int e^tdt=2e^t+C=2e^{\frac{x}{2}}+C.$$

Пример 2. Найти $\int(3x-5)^7dx$.

Решение. Сделаем подстановку $t=3x-5$, тогда $dt=3dx\Rightarrow dx=\frac{dt}{3}$, следовательно,

$$\int (3x-5)^7\,dx = \frac{1}{3}\int t^7 dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^8}{8} + C = \frac{(3x-5)^8}{24} + C.$$

Пример 3. Найти $\int x^2\left(3+2x^3\right)^4 dx$

Решение. Сделаем подстановку $t = 3+2x^3$, тогда $dt = 6x^2dx \Rightarrow x^2dx = \dfrac{dt}{6}$, следовательно,

$$\int x^2\left(3+2x^3\right)^4 dx = \frac{1}{6}\int t^4 dt = \frac{1}{6}\cdot\frac{t^5}{5} + C = \frac{\left(3+2x^3\right)^5}{30} + C.$$

Пример 4. Найти $\int \dfrac{\cos x dx}{\sqrt{1+2\sin x}}$.

Решение. Подстановка $t = 1+2\sin x$, тогда $dt = 2\cos x dx \Rightarrow \cos x dx = \dfrac{dt}{2}$, получим

$$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+2\sin x}} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{(1+2\sin x)} + C.$$

Пример 5. Найти $\int \sin(4x+3)dx$.

Решение. Сделаем подстановку $t = 4x+3$, тогда $dt = 4dx \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{4}$, следовательно,

$$\int \sin(4x+3)dx = \frac{1}{4}\int \sin t dt = -\frac{1}{4}\cos t + C = -\frac{1}{4}\cos(4x+3) + C.$$

Пример 6. Найти $\int x^2 e^{x^3-2}dx$.

Решение. Сделаем подстановку $t = x^3-2$, тогда $dt = 3x^2dx \Rightarrow x^2dx = \dfrac{dt}{3}$, следовательно,

$$\int x^2 e^{x^3-2}dx = \frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3}e^t + C = \frac{1}{3}e^{x^3-2} + C.$$

2.3 Пример 1. Найти $\int (2x+1)e^{3x}dx$.

Решение. Данный интеграл относится к первой группе, поэтому

$$\int (2x+1)e^{3x}dx = \begin{bmatrix} u = 2x+1 \Rightarrow du = 2dx, \\ dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \int e^{3x}dx = \dfrac{1}{3}e^{3x} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} -$$

$$-\frac{2}{3}\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C.$$

Пример 2. Найти $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$.

Решение. Данный интеграл относится ко второй группе, поэтому положим $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, \quad dv = \frac{dx}{x^3} \Rightarrow v = -\frac{1}{2x^2}$.

Тогда по формуле интегрирования по частям находим:

$$\int \frac{\ln x}{x^3}dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^3} + C.$$

Пример 3. Найти $\int (x-5)\cos x dx$.

Данный интеграл относится к первой группе, поэтому $u = x - 5 \Rightarrow du = dx,$ $dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x$, по формуле интегрирования по частям имеем

$$\int (x-5)\cos x dx = (x-5)\sin x - \int \sin x dx = (x-5)\sin x + \cos x + C.$$

3. Порядок выполнения практической работы

3.1 Изучить краткие теоретические сведения.
3.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
3.3 Ответить на контрольные вопросы

4. Содержание отчёта

4.1Тема и цель работы.
4.2 Решение заданий.
4.3Ответы на контрольные вопросы.

5.Контрольные вопросы

5.1 Дайте определение первообразной функции.
5.2 Дайте определение неопределенного интеграла.
5.3 Сформулируйте свойства неопределенного интеграла.
5.4 В чем состоит метод замены переменного.
5.5 Сформулируйте правило нахождения неопределенного интеграла по частям.

6.Список справочной литературы

6.1 Дадаян А.А. Математика: Учебник для СПО.- М.: Инфра-М, 2019.- 544с.
6.4 Дадаян А.А. Сборник задач по математике: Учебное пособие для СПО / А.А. Дадаян.- М.: Форум, 2018.- 352с.
6.3 Конспект теоретических занятий.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВАРИАНТ 1	ВАРИАНТ 2
№1. *Вычислите интегралы функций:* 1) $\int (\frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 8)dx$ 2) $\int \sqrt[4]{x^3}dx$ №2. *Вычислить методом замены переменных:* 1) $\int sin^2 x \cdot cos\, x\, dx$ 2) $\int 4x^3 \cdot (x^4 - 5)^7 dx$ 3) $\int \frac{e^x}{e^x - 3} dx$ №3. *Вычислить, интегрируя по частям:* 1) $\int x \cdot e^{-3x} dx$ 2) $\int (2x^2 - 4) \cdot e^{-4x} dx$	№1. *Вычислите интегралы функций:* 1) $\int x^2 \cdot (1 + 2x)dx$ 2) $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}dx$ №2. *Вычислить методом замены переменных:* 1) $\int \sqrt{3x+5}\, dx$ 2) $\int cos^7 x \cdot sin\, x\, dx$ 3) $\int \frac{5tgx}{cos^2 x} dx$ №3. *Вычислить, интегрируя по частям:* 1) $\int ln\, x \cdot (2x - 3)\, dx$ 2) $\int x^2 \cos 4x\, dx$

ВАРИАНТ 3	ВАРИАНТ 4
№1. *Вычислите интегралы функций:* 1) $\int (x^4 - 8x^3 + 4x)dx$ 2) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ №2. *Вычислить методом замены переменных:* 1) $\int \cos^4 x \cdot \sin x\, dx$ 2) $\int \frac{8x-2}{4x^2-2x} dx$ 3) $\int e^{3x^3} \cdot x^2\, dx$ №3. *Вычислить, интегрируя по частям:* 1) $\int x3^x dx$ 2) $\int (x^2 - 3) \cdot \cos\frac{x}{3} dx$	№1. *Вычислите интегралы функций:* 1) $\int (x+3)^2\, dx$ 2) $\int \frac{3}{4 \cdot \sqrt[4]{x}} dx$ №2. *Вычислить методом замены переменных:* 1) $\int \frac{1}{2x-9} dx$ 2) $\int e^{-\sin x} \cdot \cos x\, dx$ 3) $\int \frac{e^x}{7e^x-2} dx$ №3. *Вычислить, интегрируя по частям:* 1) $\int x \sin 8x\, dx$ 2) $\int (3x^2+2) \cdot \sin 5x\, dx$

Практическое занятие №6

Тема: Определенный интеграл, его свойства и геометрический смысл. Вычисление определенного интеграла с помощью формулы Ньютона-Лейбница, методами подстановки и интегрирования по частям.

Цель работы: получить практические навыки вычисления определенных интегралов по формуле Ньютона-Лейбница, методом замены и по частям, а также вычисления площадей плоских фигур и объемов тел вращения.

1. Краткие теоретические сведения

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная функция $y = f(x) \geq 0$.

Фигура, ограниченная графиком функции $y = f(x)$, прямыми линиями, $y = 0,\ x = a,\ x = b$ называется ***криволинейной трапецией***.

Определение. *Предел интегральной суммы* $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ *при* $n \to \infty$ *называется* ***определённым интегралом*** *от функции* $y = f(x)$ *и обозначается* $\int_a^b f(x)dx$, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

a - нижний предел интегрирования,

b - верхний предел интегрирования,

$f(x)$ - подынтегральная функция,

$f(x)dx$ - подынтегральное выражение;

$[a;b]$ - отрезок интегрирования.

Из определения определённого интеграла вытекает его геометрический смысл: *определённый интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции.*

Свойства определённого интеграла.

Определённый интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определённых интегралов от каждого слагаемого.

$$\int_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$$

Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла.

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

При перестановке местами пределов интегрирования определённый интеграл меняет свой знак на противоположный.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Определённый интеграл с одинаковыми пределами равен нулю.

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Отрезок интегрирования можно разбивать на части.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

где $a \prec c \prec b$.

Формула Ньютона - Лейбница. Основные методы вычисления определённого интеграла.

Вычисляют определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$ по ***формуле Ньютона - Лейбница:***

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$ **,у**

где $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$.

Формула Ньютона - Лейбница применяется для вычисления определённого интеграла во всех случаях, когда может быть найдена первообразная функция $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$.

Для вычисления определённого интеграла от функции $f(x)$ по формуле Ньютона - Лейбница необходимо сначала найти первообразную $F(x)$, поэтому для вычисления определённого интеграла применяют те же приёмы, что и для нахождения неопределённого интеграла.

Замена переменной в определённом интеграле.

При вычислении определённого интеграла $\int_a^b f(x)dx$ способом *замены переменной* данный интеграл с помощью подстановки $x = \varphi(t)$ или $t = \psi(x)$ преобразуется в другой определённый интеграл с новой переменной интегрирования t и являющийся табличным.

При этом старые пределы интегрирования $x_1 = a$ и $x_2 = b$ заменяются новыми пределы $t_1 = \psi(a), \quad t_2 = \psi(b)$.

Формула замены переменной в определённом интеграле выглядит следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

В данной формуле предполагается, что функции $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[t_1; t_2]$, а функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на отрезке $[t_1; t_2]$.

Замечание. В отличие от интегрирования методом замены переменной в неопределённом интеграле при таком же способе интегрирования в интеграле определённом к старой переменной интегрирования не возвращаются.

Интегрирование по частям в определённом интеграле.

Теорема. *Если функции* $u = u(x)$ *и* $v = v(x)$ *имеют непрерывные производные на отрезке* $[a; b]$, *то имеет место формула интегрирования по частям в определённом интеграле*

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$$
.

Замечание 1. При вычислении определённого интеграла по частям используются те же рекомендации при выборе функции u и выражения dv, что и при применении данного метода для неопределённого интеграла.

Замечание 2. При вычислении определённого интеграла по частям пределы интегрирования не пересчитываются.

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой y=f(x), двумя прямыми x=a и x=b и отрезком a≤x≤b оси абсцисс, вычисляется по формуле:

$S = \int_a^b f(x)dx,$, если f(x)≥0 на отрезке от a до b.

$S = -\int_a^b f(x)dx$, если f(x)≤0 на отрезке от a до b.

$S = \int_a^b |f(x)|dx$, если f(x)конечное число раз меняет знак на отрезке от a до b.

$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$, если площадь фигуры, ограничена двумя непрерывными кривыми y=f(x) и y=g(x) и двумя прямыми x=a и x=b, где f(x) ≥ g(x) на отрезке от a до b.

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой y=f(x), осью абсцисс и двумя прямыми x=a и x=b (a‹b), находится по формуле: $V_x = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx,$

аналогично, **объем тела вращения вокруг оси Оу** криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой x=φ(y), осью ординат и двумя прямыми y =d и y=d (c‹d), находится по формуле: $V_y = \pi\int_c^d [\varphi(y)]^2 dy,$

2. Методика решения типовых задач

2.1 Непосредственное интегрирование.

Пример 1. Вычислить определённый интеграл $\int_1^2 5x^4 dx$.

Решение. Применяя свойство 2 определённого интеграла, табличный интеграл 1 и формулу Ньютона - Лейбница, имеем:

$$\int_1^2 5x^4 dx = 5\int_1^2 x^4 dx = 5\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_1^2 = x^5\Big|_1^2 = 2^5 - 1^5 = 32 - 1 = 31$$
.

Пример 2. Вычислить $\int\limits_0^4 \left(3x - e^{\frac{x}{4}}\right)dx$.

Решение. Последовательно применим свойства 1 и 2 определённого интеграла, табличный интеграл и формулу Ньютона - Лейбница, получим:

$$\int\limits_0^4 \left(3x - e^{\frac{x}{4}}\right)dx = 3\int\limits_0^4 x dx - \int\limits_0^4 e^{\frac{x}{4}} dx = \frac{3x^2}{2}\Bigg|_0^4 - 4e^{\frac{x}{4}}\Bigg|_0^4 = \frac{3\cdot 4^2}{2} - 4\cdot e^{\frac{4}{4}} + 4e^{\frac{0}{4}} = 28 - 4e$$

Пример 3. Вычислить $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1 - x\sin x}{x} dx$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию, разделив почленно числитель на знаменатель, применим свойство определённого интеграла 1 и табличные интегралы, получим

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1 - x\sin x}{x} dx = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{x} - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx = \ln x\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \cos x\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \ln \pi - \ln\frac{\pi}{2} +$$

$$\cos\pi - \cos\frac{\pi}{2} = \ln 2 - 1$$

а. *Замена переменного*:

Пример 4. Вычислить $\int\limits_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$.

Решение. Сделаем замену $t = \sqrt{1+3x} \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{3}, \quad dx = \frac{2t}{3}dt$. Пересчитаем пределы интегрирования:

$$t_1 = \sqrt{1+3\cdot 0} = 1, \quad t_2 = \sqrt{1+3\cdot 5} = 4,$$

получаем

$$\int\limits_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}} = \int\limits_1^4 \frac{\frac{t^2-1}{3}\cdot\frac{2t}{3}dt}{t} = \frac{2}{9}\int\limits_1^4 \left(t^2 - 1\right)dt = \frac{2}{9}\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Bigg|_1^4 = \frac{2}{9}\left(\frac{4^3}{3} - 4\right) - \frac{2}{9}\left(\frac{1^3}{3} - 1\right) = \frac{2}{9}\cdot\frac{52}{3} + \frac{4}{27} = \frac{108}{27} = 4$$

.

Пример 5. Вычислить $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1+tgx}}{\cos^2 x}dx$.

Решение. Сделаем замену $t = 1 + tgx \Rightarrow dt = (1+tgx)' dx = \frac{dx}{\cos^2 x}$ и найдём новые пределы интегрирования

$$t_1 = 1 + tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1 - 1 = 0, \quad t_2 = 1 + tg\frac{\pi}{4} = 1 + 1 = 2,$$

тогда получим

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1+tgx}}{\cos^2 x}dx = \int\limits_0^2 \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 = \frac{2}{3}\sqrt{2^3} - 0 = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

b. *Интегрирование по частям:*

Пример 8. Вычислить $\int\limits_1^e x \ln x dx$.

Решение. Данный интеграл относится ко второй группе, поэтому положим $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, \quad dv = xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$, тогда имеем:

$$\int\limits_1^e x \ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int\limits_1^e x^2 \cdot \frac{dx}{x} = \frac{e^2}{2}\ln e - \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{2}\int\limits_1^e xdx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(e^2 + 1\right).$$

Пример 9. Вычислить $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} (2-x)\sin 3x dx$.

Решение. Данный интеграл относится к первой группе интегралов, поэтому примем $u = 2 - x \Rightarrow du = -dx, \quad dv = \sin 3xdx \Rightarrow v = -\frac{1}{3}\cos 3x$, тогда получим:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} (2-x)\sin 3x dx = -\frac{1}{3}(2-x)\cos 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx = -\frac{1}{3}\left(2 - \frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{2} +$$

$$\frac{1}{3}(2-0)\cos 0-\frac{1}{9}\sin 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=0+\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{9}\sin 0=\frac{2}{3}-\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$$

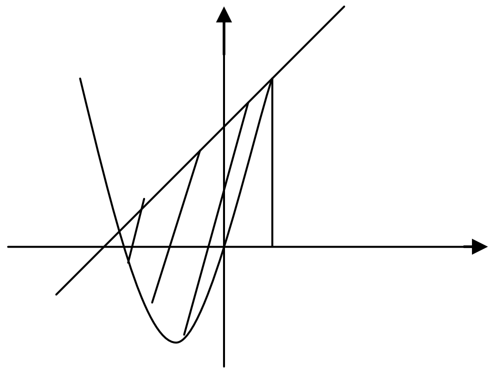
2.4 Пример 10. *Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями*

$y=x^2+4x,\ y=x+4$

Решение.

$$\begin{cases} y=x^2+4x \\ y=x+4 \end{cases}\Rightarrow x_1=-4, x_2=1$$

$$S=\int_{-4}^{1}(x+4-x^2-4x)dx=\int_{-4}^{1}(4-3x-x^2)dx=4x-\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Big|_{-4}^{1}=\left(4-\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(-16-\frac{48}{2}+\frac{64}{3}\right)=\frac{125}{6}$$



2.5 Пример 11. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $y=\frac{4}{x}$, прямыми x=3, x=12 и осью абсцисс.

Решение. Пользуясь формулой для вычисления объема, находим

$$V_x=\pi\int_3^{12}\left[\frac{4}{x}\right]^2 dx=16\pi\int_3^{12}\frac{dx}{x^2}=-16\pi\frac{1}{x}\Big|_3^{12}=-16\pi\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{3}\right)=4\pi \text{ (куб.ед.)}$$

3. Порядок выполнения практической работы

3.1 Изучить краткие теоретические сведения.
3.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
3.3 Ответить на контрольные вопросы

4. Содержание отчёта

4.1 Тема и цель работы.
4.2 Решение заданий.
4.3 Ответы на контрольные вопросы.

5. Контрольные вопросы

5.1 Запишите формулу Ньютона-Лейбница.

5.2 Запишите формулу для вычисления площади плоской фигуры при помощи определенного интеграла.

5.3 Запишите формулу для вычисления объема тела вращения.

6.Список справочной литературы

6.1 Дадаян А.А. Математика: Учебник для СПО.- М.: Инфра-М, 2019.- 544с.

6.5 Дадаян А.А. Сборник задач по математике: Учебное пособие для СПО / А.А. Дадаян.- М.: Форум, 2018.- 352с.

6.3 Конспект теоретических занятий.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВАРИАНТ №1	**ВАРИАНТ №2**
№1. Вычислить интегралы: $a)\int_{-1}^{1}(6x^2-2x-5)dx$ $б)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{3\sin x+1}\cos xdx$ $в)\int_{1}^{e}x^3\ln xdx$ №2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. $y=2x^2,$ $y=3x+2.$ Сделать чертеж. №3. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=\sqrt{x-2}$, прямыми х=2, х=4 и осью абсцисс. Сделать чертеж.	№1. Вычислить интегралы: $a)\int_{1}^{9}\frac{x-1}{\sqrt{x}}dx$ $б)\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin xdx}{3-\cos x}$ $в)\int_{0}^{5}xe^{x}dx$ №2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. $y=-x^2-2,$ $y=-4x+1.$ Сделать чертеж. №3. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=\frac{3}{x}$, прямыми х=3, х=6 и осью абсцисс. Сделать чертеж.
ВАРИАНТ №3	**ВАРИАНТ №4**
№1. Вычислить интегралы: $a)\int_{-1}^{1}(2x-3x^2)dx$ $б)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos xdx}{2+\sin x}$ $в)\int_{1}^{e^2}\sqrt{x}\ln xdx$ №2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.	№1. Вычислить интегралы: $a)\int_{1}^{4}(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})dx$ $б)\int_{0}^{1}(e^{x}-4)^{4}e^{x}dx$ $в)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\sin xdx$ №2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

$y = x^2 - 5x,$ $y = x - 5.$ Сделать чертеж.	$y = x^2 + 6,$ $y = -6x + 1.$ Сделать чертеж.
№3. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = -\frac{2}{x}$, прямыми x=1, x=2 и осью абсцисс. Сделать чертеж.	№3. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох криволинейной трапеции, ограниченной прямой $y = 3x - 1$, прямыми x=1, x=3 и осью абсцисс. Сделать чертеж.

Практическое занятие №7

Тема: Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

Цель работы: получить практические навыки решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

1. Краткие теоретические сведения

Дифференциальные уравнения, основные понятия и определения. Задача Коши.

Определение 1.
Дифференциальным называется уравнение, связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию $y(x)$ и производные неизвестной функции $y', y'', y'''...y^{(n)}$ (или дифференциалы неизвестной функции $dy, d^2y, d^3y...d^{(n)}y$) различных порядков.

Дифференциальное уравнение относительно функции одной независимой переменной называется ***обыкновенным дифференциальным уравнением.***

Дифференциальное уравнение относительно функции двух или более переменных называется ***дифференциальным уравнением в частных производных.***

$$2x + y - 3y' = 0, \quad xydx = (2x+1)dy, \quad y'' = 2x.$$

Определение 2.
Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной (дифференциала), входящей в это уравнение.

Например, $xy' + y - 2 = 0$ - уравнение первого порядка, $d^2y = (x^2 - 1)dx^2$ - уравнение второго порядка, $y''' + 7y' - 3y = 0$ - уравнение третьего порядка.

Определение 3.
Решением или ***интегралом*** дифференциального уравнения называется такая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

При отыскании решения дифференциального уравнения используют операцию интегрирования, что приводит к появлению в решении уравнения произвольной постоянной. При n- кратном интегрировании в решении появятся n произвольных постоянных, таким образом, количество произвольных постоянных совпадает с порядком дифференциального уравнения.

Определение 4.
Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, зависящая от n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и удовлетворяющая данному уравнению при любых значениях этих постоянных.

Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется ***интегрированием дифференциального уравнения,*** а общее решение дифференциального уравнения, записанное в неявном виде, называется ***общим интегралом дифференциального уравнения.***

Определение 5.
Частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего при фиксированных значениях произвольных постоянных.

Чтобы из бесконечного числа решений дифференциального уравнения, определяемых его общим решением, выделить одно частное решение, вводят, так называемые, ***начальные условия.***

Задача нахождения частного решения $y = y(x)$, удовлетворяющего начальным условиям, называется ***задачей Коши.***

Геометрически общее решение дифференциального уравнения определяет семейство кривых, называемых ***интегральными кривыми,*** а частное решение дифференциального уравнения определяет одну единственную интегральную кривую.

Дифференциальные уравнения первого порядка, основные понятия и определения.

Общий вид дифференциального уравнения I порядка определяется выражением
$$F(x, y, y') = 0$$
или
$$y' = f(x, y),$$
если оно разрешимо относительно y'.

Общим решением дифференциального уравнения I порядка называется функция
$$y = \varphi(x, C),$$
удовлетворяющая данному уравнению при любых значениях произвольной постоянной C.

В процессе отыскания общего решения дифференциального уравнения I порядка нередко приходят к соотношению вида
$$\Phi(x, y, C) = 0,$$
не разрешённому относительно функции y. Выразить y из этого соотношения в элементарных функциях иногда является затруднительным, а иногда и не представляется

возможным; в таких случаях общее решение оставляют в неявном виде и называют ***общим интегралом*** дифференциального уравнения.

Частным решением дифференциального уравнения I порядка называется любая функция

$$y = \varphi(x, C_0),$$

которая получается из общего решения

$$y = \varphi(x, C),$$

если в последнем произвольной постоянной C придать определённое значение $C = C_0$.

Как и в случае с общим решением частное решение также может быть записано в неявном виде

$$\Phi(x, y, C) = 0$$ (***частный интеграл***).

Уравнения с разделяющимися переменными.

Определение

Уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y) \qquad (1)$$

или

$$M_1(x)N_1(y)dy + M_2(x)N_2(y)dx = 0 \qquad (2).$$

1. Рассмотрим уравнение вида (1). Представим

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

и подставим в исходное уравнение, получим

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

Преобразуем уравнение таким образом, чтобы все множители, содержащие переменную y,стояли в левой части, а переменную x - в правой; для этого умножим обе части уравнения на dx и разделим на $f_2(y)$, получим:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx.$$

Проинтегрируем левую часть полученного равенства по y, а правую по x имеем

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C.$$

Таким образом, получили соотношение, связывающее решение y, независимую переменную x и произвольную постоянную C, т.е. получили общий интеграл уравнения (1).

2. Рассмотрим уравнение вида (2). Перенесём второе слагаемое в правую часть:

$$M_1(x)N_1(y)dy = -M_2(x)N_2(y)dx$$

Разделим переменные, разделив обе части уравнения на $M_1(x)$ и $N_2(y)$, получим

$$\frac{N_1(y)}{N_2(y)}dy = -\frac{M_2(x)}{M_1(x)}dx.$$

Проинтегрируем обе части уравнения, получим его общий интеграл:

$$\int\frac{N_1(y)}{N_2(y)}dy = -\int\frac{M_2(x)}{M_1(x)}dx + C.$$

2. Методика решения типовых задач

2.1 Пример 1. Найти общее решение уравнения $y' = -\frac{y}{x}$.

Решение. Представим $y' = \frac{dy}{dx}$, подставим в данное уравнение и разделим переменные

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \quad \Big| \cdot \frac{dx}{y},$$

получим

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем левую часть по переменной y, а правую по переменной x, получим

$$\int\frac{dy}{y} = \ln|y|, \quad \int\frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

приравняем полученные интегралы, получим общий интеграл уравнения

$$\ln|y| = \ln|x| + C.$$

Пример 2. Найти общий интеграл уравнения $(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0$.

Решение. Разделим переменные

$$(y-1)xdy=(1+x)ydx \quad \Big| \cdot \frac{1}{x \cdot y},$$

получим

$$\frac{(y-1)}{y}dy=\frac{(1+x)}{x}dx,$$

проинтегрируем обе части полученного уравнения по переменным y и x соответственно, получим общий интеграл уравнения

$$\int\frac{(y-1)}{y}dy=\int\frac{(1+x)}{x}dx$$

$$\int\left(1-\frac{1}{y}\right)dy=\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx \quad ,$$

$$\int dy-\int\frac{1}{y}dy=\int\frac{1}{x}dx+\int dx$$

$$y-\ln|y|=\ln|x|+x+C$$

или

$$\ln|xy|+x-y=C$$

Полученное соотношение и есть общий интеграл уравнения.

Пример 3. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $(x^2-x^2y)dy+(y^2+xy^2)dx=0$.

Решение. Преобразуем уравнение, вынеся за скобки общие множители:

$$x^2(1-y)dy+y^2(1+x)dx=0$$

Разделим переменные

$$x^2(1-y)dy=-y^2(1+x)dx \quad \Big| \cdot \frac{1}{x^2y^2}$$

$$\frac{1-y}{y}dy=\frac{1+x}{x^2}dx$$

Проинтегрируем обе части уравнения, получим

$$\int\frac{1-y}{y}dy=\int\frac{1+x}{x^2}dx$$

$$\int\frac{dy}{y}-\int dy=\int\frac{1}{x^2}dx+\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y|-y=-\frac{1}{x}+\ln|x|+C$$

или

$\ln|xy|+y-\dfrac{1}{x}=C$ - общий интеграл исходного уравнения.

Пример 4. Найти решение дифференциального уравнения $y' = \frac{y}{x+1}$, удовлетворяющее начальным условиям $y=6$ при $x=2$ ($y(2)=6$).

Решение. Имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+1} \quad \Big| \cdot \frac{dx}{y}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+1}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x+1}$$

$$\ln|y| = \ln|x+1| + C$$

По начальным условиям определяем значение произвольной постоянной C, для этого в общий интеграл уравнения подставим $y=6,\ x=2$, получим

$$\ln 6 = \ln 3 + C \Rightarrow C = \ln 2.$$

Подставим найденное значение произвольной постоянной в общий интеграл уравнения, получим частный интеграл

$$\ln|y| = \ln|x+1| + \ln 2,$$

откуда получаем частное решение данного уравнения

$$y = 2(x+1).$$

Пример 5. Найти частное решение уравнения $\frac{dx}{\cos^2 x \cos y} + ctgx \sin y dy = 0$ при $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \pi$.

Решение. Разделим переменные

$$ctgx \sin y dy = -\frac{dx}{\cos^2 x \cos y} \quad \Big| \cdot \frac{\cos y}{ctgx}$$

$$\sin y \cos y dy = -\frac{dx}{\cos^2 x ctgx}$$

$$\frac{1}{2}\sin 2y = -\frac{\sin x dx}{\cos^3 x}$$

Проинтегрируем левую часть $\int \frac{1}{2}\sin 2y dy = \frac{1}{2}\int \sin 2y dy = -\frac{1}{4}\cos 2y$.

Правую часть интегрируем заменой $t = tgx,\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$, тогда

$$-\int \frac{tgx dx}{\cos^2 x} = -\int t dt = -\frac{t^2}{2} + C = -\frac{1}{2}tg^2 x + C,$$

приравняем найденные интегралы левой и правой частей, получим общий интеграл уравнения

$$-\frac{1}{4}\cos 2y = -\frac{1}{2}tg^2 x - C, \quad \frac{1}{4}\cos 2y = \frac{1}{2}tg^2 x + C,$$

Подставим в общий интеграл $y = \pi,\ x = \frac{\pi}{3}$:

$$\frac{1}{4}\cos 2\pi = \frac{1}{2}tg^2\frac{\pi}{3} + C$$
$$\frac{1}{4} = \frac{3}{2} + C \Rightarrow C = -\frac{5}{4}.$$

Подставим найденное значение C в общий интеграл, получим частный интеграл заданного уравнения

$$\frac{1}{4}\cos 2y = \frac{1}{2}tg^2 x - \frac{5}{4} \text{ или } \cos 2y = 2tg^2 x - 5.$$

3. Порядок выполнения практической работы

3.1 Изучить краткие теоретические сведения.
3.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
3.3 Ответить на контрольные вопросы

4. Содержание отчёта

4.1 Тема и цель работы.
4.2 Решение заданий.
4.3 Ответы на контрольные вопросы.

5. Контрольные вопросы

5.1 Дайте определение дифференциального уравнения.
5.2 Что называется порядком дифференциального уравнения?
5.3 Что называется общим решением дифференциального уравнения?
5.4 Что называется частным решением дифференциального уравнения?
5.5 Как называется процесс решения дифференциального уравнения?
5.6 Что такое задача Коши?
5.7 Запишите вид дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

6.Список справочной литературы

6.1 Дадаян А.А. Математика: Учебник для СПО.- М.: Инфра-М, 2019.- 544с.
6.6 Дадаян А.А. Сборник задач по математике: Учебное пособие для СПО / А.А. Дадаян.- М.: Форум, 2018.- 352с.
6.3 Конспект теоретических занятий.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВАРИАНТ №1	ВАРИАНТ №2
№1. Решить дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными: $1) 2ydx-(1+x)dy=0$ $2) (1+x^2)dy-2xydx=0$ $3) (1+x)ydx+(1-y)xdx=0$ y=1 при x=1	№1. Решить дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными: $1) ydx+(1-y)xdy=0$ $2) (1+x^2)dy-(xy+x)dx=0$ $3) y^2dx=e^x dy$ y=1 при x=0
ВАРИАНТ №3	**ВАРИАНТ №4**
№1. Решить дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными: 1) [illegible] 2) [illegible] 3) [illegible] $y=\frac{\pi}{4}$ *при* $x=\frac{\pi}{4}$	№1. Решить дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными: $1) (3+x)dy-(2+y)dx=0$ $2) (y-x^2y)dy+(x+xy^2)dx=0$ $3) 2dx+ydy=yx^2dy-y^2dx$ y=1 при x=2

Практическое занятие №8

Тема: Решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Цель работы: получить практические навыки решения линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

1. Краткие теоретические сведения

Линейные дифференциальные уравнения.

Определение.

Дифференциальное уравнение называется ***линейным***, если оно линейно (т.е. первой степени) относительно искомой функции y и её первой производной y'.

Общий вид линейного уравнения I порядка

$$y'+P(x)y=Q(x),$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ - функции от переменной x.

Решение линейного уравнения ищут в виде

$$y=uv,$$

где $u=u(x)$, $v=v(x)$ - новые произвольные функции от переменной x, тогда

$$y'=u'v+uv'.$$

Подставим в линейное уравнение выражения для y' и y, получим
$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$.

В силу произвольности выбора функций u и v, положим
$u'v + P(x)uv = 0$
или
$u' + P(x)u = 0$
тогда
$uv' = Q(x)$.

Таким образом, для определения функций u и v получили систему двух дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными:

$$\begin{cases} u' + P(x)u = 0, \\ uv' = Q(x) \end{cases}$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y' - yctgx = \dfrac{1}{\sin x}$.

Решение. Полагаем $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$ и данное уравнение примет вид
$$u'v + uv' - uvctgx = \frac{1}{\sin x}.$$

В силу произвольности выбора функций u и v положим
$$\begin{cases} u' - uctgx = 0, \\ uv' = \dfrac{1}{\sin x} \end{cases}.$$

Решим сначала первое уравнение системы, разделив в нём переменные

$$\frac{du}{dx} = uctgx \left| \cdot \frac{dx}{u}, \right. \quad \ln|u| = \ln|\sin x|, \quad \Rightarrow u = \sin x$$

$$\frac{du}{u} = ctgxdx$$

Решим второе уравнение системы, подставив в него найденную функцию u и разделив в нём переменные:
$$\sin x \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{1}{\sin x} \left| \cdot \frac{dx}{\sin x}, \right.$$
$$dv = \frac{dx}{\sin^2 x}$$

Проинтегрируем левую и правую части, получим
$v = -ctgx + C$.

Итак, общее решение
$y = uv = \sin x(-ctgx + C)$.

Пример 2. Найти частное решение дифференциального уравнения $dy = (ytgx - 1)dx$ при $y(0) = 3$.

Решение. Разделим обе части уравнения на dx и перенесём слагаемое $ytgx$ влево, получим:

$y' - ytgx = -1.$

Положим $y = uv,$ тогда $y' = u'v + uv'$, подставим полученные выражения в уравнение:

$u'v + uv' - uvctgx = -1,$

в силу произвольности функций u и v положим

$\begin{cases} u' - utgx = 0, \\ uv' = -1 \end{cases}$

Разделим переменные в первом уравнении системы

$\frac{du}{dx} = utgx \left| \cdot \frac{dx}{u} \right.$

$\frac{du}{u} = tgxdx$

Проинтегрируем обе части уравнения, получим

$\ln|u| = -\ln|\cos x| \Rightarrow u = -\frac{1}{\cos x}.$

Подставим во второе уравнение системы найденную функцию u и разделим в нём переменные:

$\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{dv}{dx} = -1 \left| \cdot \cos x dx \right.$

$dv = -\cos x dx$

Проинтегрируем обе части уравнения, получим

$v = -\sin x + C,$

тогда общее решение исходного уравнения имеет вид

$y = -\frac{1}{\cos x}(-\sin x + C).$

Найдём частное решение уравнения. Подставим в общее решение начальные условия, получим

$3 = -\frac{1}{\cos 0}(-\sin 0 + C) \Rightarrow C = -3,$

таким образом, частное решение данного уравнения при заданных начальных условиях имеет вид

$$y = -\frac{1}{\cos x}(3 - \sin x).$$

2. Порядок выполнения практической работы

3.1 Изучить краткие теоретические сведения.
3.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
3.3 Ответить на контрольные вопросы

3. Содержание отчёта

4.1 Тема и цель работы.
4.2 Решение заданий.
4.3 Ответы на контрольные вопросы.

4. Контрольные вопросы

5.1 Дайте определение дифференциального уравнения.
5.2 Что называется порядком дифференциального уравнения?
5.3 Что называется общим решением дифференциального уравнения?
5.4 Что называется частным решением дифференциального уравнения?
5.5 Как называется процесс решения дифференциального уравнения?
5.6 Что такое задача Коши?
5.7 Запишите вид линейного дифференциального уравнения.

6.Список справочной литературы

6.1 Дадаян А.А. Математика: Учебник для СПО.- М.: Инфра-М, 2019.- 544с.
6.7 Дадаян А.А. Сборник задач по математике: Учебное пособие для СПО / А.А. Дадаян.- М.: Форум, 2018.- 352с.
6.3 Конспект теоретических занятий.

ПРИЛОЖЕНИЕ.

Решить линейные дифференцированные уравнения $1^{го}$ порядка

Вариант 1

1. $y' - \frac{y}{x} = x$

2. $y' - y = \frac{1+x^2}{x} * e^x$

3. $y' - \frac{2y}{x} = \frac{-3}{x^2}$

Вариант 2

1. $y' + y = e^x$

2. $y' + \frac{y}{x} = \frac{sin\,2x}{x}$

3. $y' + \frac{y}{x} = \frac{e^{3x}}{x}$

Вариант 3

1. $y' + y = e^{-x}$

2. $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$

3. $y' - 7y = 8e^{3x}$

Вариант 4

1. $y' + \frac{2y}{x} = x^3$

2. $y' - \frac{2y}{x} = x^2 * e^x$

3. $y' - y\,tg\,x = \frac{1}{cos\,x}$

Практическое занятие №9

Тема: Решение линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Цель работы: получить практические навыки решения линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

1. Краткие теоретические сведения

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Линейными однородными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

где

a, b, c - числа, называемые коэффициентами уравнения,

y - неизвестная функция.

Чтобы решить уравнение

$$ay'' + by' + cy = 0$$

нужно составить и решить характеристическое уравнение

$$ak^2 + bk + c = 0.$$

Общее решение дифференциального уравнения строится в зависимости от корней характеристического уравнения, а именно:

1. Если корни характеристического уравнения действительны и различны $k_1 \neq k_2 \quad (D \succ 0)$, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x},$$

где

$k_1, \quad k_2$ -корни характеристического уравнения,

$C_1, \quad C_2$ - произвольные постоянные.

2. Если характеристическое уравнение имеет два одинаковых действительных корня $k_1 = k_2 \quad (D = 0)$, , то решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = e^{kx}\left(C_1 x + C_2\right).$$

3. Если корни характеристического уравнения являются комплексно сопряжёнными $k_1 = \alpha + \beta i, \quad k_2 = \alpha - \beta i \quad (D \prec 0)$, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$$

2. Методика решения типовых задач

2.1 Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y' - 2y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + k - 2 = 0$. Его корни $k_1 = -2, \quad k_2 = 1,$. Т.к. корни действительные и различные, то общее решение записывается в виде

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 4 = 0$ имеет равные корни

$$k_1 = k_2 = 2,$$

следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

Пример 3. Найти частное решение уравнения $y'' + 2y' + 5y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y\big|_{x=0} = 0$, $y'\big|_{x=0} = 1$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 2k + 5 = 0$ имеет комплексно-сопряжённые корни: $k_1 = -1 + 2i, \quad k_2 = -1 - 2i$, Таким образом, общее решение записывается в виде

$$\mathrm{y} = \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}(\mathrm{A}\cos 2\mathrm{x} + \mathrm{B}\sin 2\mathrm{x}).$$

Найдём частное решение, которое удовлетворяет заданным начальным условиям. Из первого начального условия следует, что

$$0 = \mathrm{e}^0(\mathrm{A}\cos 0 + \mathrm{B}\sin 0) \Rightarrow \mathrm{A}\cos 0 = 0 \Rightarrow \mathrm{A} = 0.$$

Найдём y':

$$\begin{aligned} y' &= -e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + e^{-x}(2B\cos 2x - 2A\sin 2x) = \\ &= e^{-x}(2B\cos 2x - 2A\sin 2x - A\cos 2x - B\sin 2x) = \\ &= e^{-x}((2B - A)\cos 2x + (-A - B)\sin 2x). \end{aligned}$$

и подставим во второе начальное условие, получим

$$1 = (2B - A)\cos 0 + (-2A - B)\sin 0,$$

откуда, учитывая, что $\mathrm{A} = 0$, получим

$$2B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, искомое частное решение имеет вид

$$y = \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x.$$

Пример 4. Найти интегральную кривую дифференциального уравнения $y'' + 2y' + 2y = 0$, проходящую через точку М(0;1) и касающуюся в этой точке прямой y=x+1.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + 2k + 2 = 0$; его корни $x_1 = 1 + i$ и $x_2 = 1 - i$ являются комплексно-сопряжёнными, поэтому уравнение множества интегральных кривых запишется следующим образом

$$y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

Найдём уравнение искомой интегральной кривой, для чего в равенства

$$y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x), y' = e^{-x}((C_2 - C_1)\cos x + (C_2 + C_1)\sin x)$$

подставим значение y=1 и углового коэффициента касательной $y' = k = 1$ в точке x=0. В результате получим систему уравнений для определения постоянных C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 - C_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 1, \quad C_2 = 2.$$

Подставив эти значения в общее решение, получим уравнение искомой интегральной кривой

$$y = e^{-x}(\cos x + 2\sin x).$$

3. Порядок выполнения практической работы

3.1 Изучить краткие теоретические сведения.
3.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
3.3 Ответить на контрольные вопросы

4. Содержание отчёта

4.1 Тема и цель работы.
4.2 Решение заданий.
4.3 Ответы на контрольные вопросы.

5. Контрольные вопросы

5.1 Дайте определение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
5.2 Что называется характеристическим уравнением?

5.3 Какие возможны случаи для решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?

6.Список справочной литературы

6.1 Богомолов Н.В., Самойленко П.И. Математика, Учебник. - М: Дрофа, 2016-395с.

6.2 Конспект теоретических занятий.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВАРИАНТ №1	**ВАРИАНТ №2**
№1. Найти общее решение дифференциальных уравнений: 1) $y'' - 7y' + 10y = 0$ 2) $y'' - 5y' = 0$ 3) $y'' - 9y = 0$ 4) $y'' - 8y' + 16y = 0$ 5) $y'' - 6y' + 25y = 0$ №2. Найти частное решение дифференциального уравнения, отвечающее заданным начальным условиям: $y'' - 2y' - 3y = 0$, y=8 при x=0 и $y' = 0$	№1. Найти общее решение дифференциальных уравнений: 1) $y'' + y' - 6y = 0$ 2) $y'' + 3y' = 0$ 3) $y'' - 4y = 0$ 4) $y'' - 6y' + 9y = 0$ 5) $y'' - 2y' + 5y = 0$ №2. Найти частное решение дифференциального уравнения, отвечающее заданным начальным условиям: $y'' + y' - 20y = 0$, $y = \frac{9}{5}$ при x=0 и $y' = 0$
ВАРИАНТ №3	**ВАРИАНТ №4**
№1. Найти общее решение дифференциальных уравнений: 1) $y'' - 8y' + 15y = 0$ 2) $y'' - y' = 0$ 3) $y'' - 25y = 0$ 4) $y'' + 2y' + y = 0$ 5) $y'' - 4y' + 7y = 0$ №2. Найти частное решение дифференциального уравнения, отвечающее заданным начальным условиям: $y'' + 8y' + 16y = 0$, y=1 при x=0 и $y' = 1$	№1. Найти общее решение дифференциальных уравнений: 1) $y'' + 5y' + 6y = 0$ 2) $y'' + 2y' = 0$ 3) $y'' - y = 0$ 4) $y'' - 4y' + 4y = 0$ 5) $y'' - 6y' + 13y = 0$ №2. Найти частное решение дифференциального уравнения, отвечающее заданным начальным условиям: $y'' - 10y' + 25y = 0$, y=2 при x=0 и $y' = 8$

Практическое занятие №10

Тема: Числовые ряды. Необходимый признак сходимости. Достаточные признаки сходимости. Признак сравнения рядов.

Цель работы: освоить понятие числового ряда, научиться применять необходимый признак сходимости рядов, научиться применять признак сравнения рядов для установления сходимости ряда.

1. Краткие теоретические сведения

Ряды. Основные определения. Признаки сходимости рядов.

Пусть дана числовая последовательность чисел $a_1; a_2; a_3; \dots a_n;$ ... Выражение:

$a_1 + a_2 + a_3 + .. + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **бесконечным числовым рядом или рядом.**

Числа $a_1; a_2; a_3; \dots a_n$ называются *членами ряда*; a_n-*общий член.*

Сумма $s_n = a_1 + a_2 + .. + a_n$ называется *частичной (или частной) суммой* ряда.

Сходимость и расходимость рядов.

Ряд называется **сходящимся**, если последовательность его частных сумм:

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ при n→ ∞ имеет конечный предел:

$\lim_{n\to\infty} S_n = S$

Этот предел **S** называется **суммой сходящегося ряда.**

Если $\lim_{n\to\infty} S_n$ не существует или $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ (бесконечный), то ряд называется **расходящимся.**

Такой ряд суммы не имеет.

Примеры:

1) Ряд: 1+2+3+4+…+n+…

Расходящийся, т.к. последовательность его частичных сумм:

$s_1 = 1$

$s_2 = 3$

$s_3 = 6$

$s_4 = 10$….имеет бесконечный предел

2) Ряд 0+0+0+…+0+… сходится, т.к. последовательность частных сумм равна 0

3) Ряд 1+1+1+…+1+… расходится, т.к. $s_n = n \Rightarrow$

$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$

4) Ряд 1-1+1-1+1-1+… расходится, т.к. последовательность его частных сумм 1;0;1;0. не имеет предела.

Необходимый признак сходимости ряда. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами.

Необходимый признак сходимости ряда: Ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ может сходиться лишь в том случае, если его общий член a_n стремится к 0 при n→ ∞:

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Достаточный признак расходимости ряда. Если же общий член a_n не стремится к 0 => ряд расходится

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$

Предостережение: необходимое условие $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$=0 недостаточно для сходимости ряда, Ряд у которого $a_n \to 0$, может сходиться, а может и расходиться.

Пример 1. Ряд 0,4 +0,44+0,444+0,4444+…

расходится, т.к. общий член a_n не стремится к 0.

Пример 2. Ряд 1-1+1-1+…

расходится т.к. общий член a_n=$(-1)^{n+1}$ не стремится к 0.

И вообще не имеет предела.

Пример 3. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{n+5}$ расходится, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-2}{n+5} = 3 \neq 0.$

Пример 4. Ряд $(1+\frac{1}{1})^1 + (1+\frac{1}{2})^2 + \dots + (1+\frac{1}{n})^n + \cdots$

расходится, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e \neq 0.$

Но:

5) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ +…+$\frac{1}{n}+\cdots$ называется **гармоническим рядом** и является расходящимся рядом, т.к. последовательность его частичных сумм неограниченно возрастает.

Т.е. необходимый признак сходимости не дает возможности судить о том, сходится ли данный ряд или нет. Сходимость и расходимость ряда во многих случаях можно установить с помощью *достаточных признаков сходимости*.

Рассмотрим некоторые из них для знакоположительных рядов, т.е. для рядов с неотрицательными членами (знакоотрицательный ряд переходит в знакоположительный путём умножения его на (-1), что не влияет на сходимость ряда).

Достаточные признаки сходимости

1. **Признак сравнения рядов**

Сходимость или расходимость знакоположительного ряда часто устанавливается путём сравнения его с другим («эталонным») рядом, о котором известно, сходится он или нет.

Часто «эталонными» рядами являются:

а) гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – расходящийся или

б) геометрическая прогрессия: $a + aq + aq^2 + \ \dots + aq^n + \ \dots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, $(a > 0)$

$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}, q \neq 1$

- Если $|q| < 1$ $\to$ ряд сходится $S = \frac{a}{1-q}$
- Если $|q| > 1$ $\to$ ряд расходится
- Если $|q| = 1$ $\to$ ряд расходится

Пример: ряд $2^3 + 2^2 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \ \dots + \frac{1}{2^{n-3}} + \dots$

Можно расписать так:

$$2^3 \cdot 1 + 2^3 \cdot \frac{1}{2} + 2^3 \cdot \frac{1}{2^n} + 2^3 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots + 2^3 \cdot \frac{1}{2^n} + \dots$$

=> Это ряд геометрической прогрессии, где а=2^3

q=$\frac{1}{2} < 1$ => этот ряд сходится.

Теорема: пусть даны два знакоположительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

Если для всех n выполняется неравенство $u_n \leq v_n$ => из сходимости второго ряда следует сходимость первого ряда, из расходимости ряда первого следует расходимость ряда второго.

Примеры:

1)Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{7 \cdot 2} + \frac{1}{7 \cdot 2^2} + \frac{1}{7 \cdot 2^3} + \ldots + \frac{1}{7 \cdot 2^n} + \ldots$$

Сравним данный ряд с рядом

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$ –ряд геометрической прогрессии, который является сходящимся, т.к. q=$\frac{1}{2} < 1$.

Т.к. $\frac{1}{7 \cdot 2^n} < \frac{1}{2^n}$ => данный ряд сходится.

2)Исследовать на сходимость ряд:

$$1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \ldots$$

Сравним данный ряд с гармоническим рядом:

1+$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ –ряд расходящийся

Т.к. каждый $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \frac{1}{n}$ => данный ряд расходится

3)Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5+3^n}$

Сравним с рядом геометрической прогрессии:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, который сходится (q= $\frac{1}{3} < 1$).

Т.к.$\frac{1}{5+3^n} < \frac{1}{3^n}$ => данный ряд сходится

4)Сходимость ряда: 1+$\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5^2} + \cdots + \frac{1}{n \cdot 5^{n-1}} + \cdots$

Сравнить с рядом геометрической прогрессии

1+$\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{5^{n-1}}$ – сходится.

3.Порядок выполнения практической работы.

3.1 Изучить краткие теоретические сведения.
3.2 Решить задания своего варианта (Приложение).
3.3 Ответить на контрольные вопросы.

4. Содержание отчёта
4.1Тема и цель занятия.
4.2 Решение заданий.
4.3Ответы на контрольные вопросы.

5. Контрольные вопросы

5.1 Дайте понятие числового ряда.
5.1 Сформулируйте необходимый признак сходимости числового ряда.
5.3 Сформулируйте признак сравнения числовых рядов.

6. Список справочной литературы

6.1. Богомолов Н.В., Самойленко П.И. Математика. Учебник. - М: Дрофа, 2011-395с.
6.2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике. Учебное пособие. – М: Дрофа, 2011-204с.
6.3. Конспект лекций.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. **Найти первые четыре члена ряда по его заданному общему числу.**

Вариант 1

$$a_n = \frac{(n+1)!}{2n}$$

Вариант 2

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}}$$

Вариант 3

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

Вариант 4

$$a_n = \frac{n^n}{n!}$$

2. **Исследовать на сходимость ряд, применяя необходимый признак сходимости или признак сравнения рядов.**

Вариант 1

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4n+5}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n+3}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5 \cdot 2^n}$

Вариант 2

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10n-1}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-5}{n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 4^n}$

Вариант 3

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{5n+2}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-4}{3n+1}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ln(n+1)}$

Вариант 4

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n}{n-1}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4}{n-5}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n+1}$

Практическое занятие №11

Тема: Исследование на сходимость рядов с положительными членами по признаку Даламбера.

Цель работы: получить практические навыки использования признаков Даламбера, Коши для определения сходимости или расходимости числовых рядов.

1. Краткие теоретические сведения.

1) *Признак Даламбера:*

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

Если q>1, то ряд расходится.
Если q<1, то ряд сходится.

Признак Коши (радикальный):

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$.

Если q>1, то ряд расходится.
Если q<1, то ряд сходится.

2.Методика решения типовых задач.

2.1 Задача 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

Решение.

$$a_n = \frac{n}{3^n},\quad a_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{3} = 1\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Т. к. $\frac{1}{3} < 1$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ *сходится по признаку Даламбера.*

2.2 Задача 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$

Решение.

$$a_n = \frac{n!}{10^n},\quad a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{10^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\cdot 10^n}{10^{n+1}\cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{10} = \infty$$

Т. к. $\infty > 1$, *то ряд расходится по признаку Даламбера.*

2.3 Задача 3. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{3}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^3 + \dots + \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^n + \dots$$

Решение

$$a_n = \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n+1} = 2$$

Т.к. $2>1$, *то ряд расходится по признаку Коши*

3.Порядок выполнения практической работы.

3.1 Изучить краткие теоретические сведения.
3.2 Решить задания своего варианта (Приложение).
3.3 Ответить на контрольные вопросы.

4. Содержание отчёта
4.1Тема и цель занятия.
4.2 Решение заданий.
4.3Ответы на контрольные вопросы.

5. Контрольные вопросы

5.1 Сформулируйте признак Даламбера.
5.2 Сформулируйте признак Коши.
5.3 В чем состоит задача Коши?

6. Список справочной литературы

6.4. Богомолов Н.В., Самойленко П.И. Математика. Учебник. - М: Дрофа, 2011-395с.
6.5. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике. Учебное пособие. – М: Дрофа, 2011-204с.
6.6. Конспект лекций.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Исследовать на сходимость ряды

1 вариант

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

4) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{2^n}$

2 вариант

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n * n^2}{5^n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2n+1}$

3 вариант

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3*2^n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n}$

4 вариант

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{5^n}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{4n-1}\right)^{n^2}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

Практическое занятие №12
Тема: Знакопеременные ряды. Исследование на сходимость знакопеременных рядов по признаку Лейбница.

Цель работы: получить практические навыки использования признака Лейбница для определения сходимости или расходимости числовых рядов.

2. **Краткие теоретические сведения.**

Признак Лейбница (для знакочередующегося ряда):

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$

Ряд сходится, если выполняются два условия:

1) элементы ряда по абсолютной величине монотонно убывают;
2) предел общего члена ряда равен нулю.

3. **Решение задач**

Пример 1. Пользуясь признаком Лейбница, исследовать на сходимость ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\dots+(-1)^n\frac{1}{n^2+1}+\dots$

Решение.

Так как члены данного ряда по абсолютной величине монотонно

убывают $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{5}>\dots$ и общий член ряда стремится к нулю $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}=0$, то в силу признака Лейбница ряд сходится.

Пример 2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

$a)\ 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\dots$

$б)\ 1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\dots$

Решение.

а) Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\dots$$

По признаку Даламбера этот ряд сходится, т.к.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

Таким образом ряд расходится абсолютно.

б) Ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда

$1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\dots$ *- расходится как общегармонический (т.к.* $\frac{1}{3}<1$*).*

Следовательно, исходный ряд не является абсолютно сходящимся.

Исследуем его на условную сходимость.

Ряд $1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\dots$ *сходится (по признаку Лейбница), так как*

$$1>\frac{1}{\sqrt[3]{2}}>\frac{1}{\sqrt[3]{3}}>\dots;\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=0$$

Итак, данный ряд сходится условно.

3.Порядок выполнения практической работы.

3.1 Изучить краткие теоретические сведения.
3.2 Решить задания своего варианта (Приложение).
3.3 Ответить на контрольные вопросы.

4. Содержание отчёта

4.1Тема и цель занятия.
4.2 Решение заданий.
4.3Ответы на контрольные вопросы.

5. Контрольные вопросы

5.1 Какой ряд называется знакочередующимся?
5.3 Сформулируйте признак Лейбница.
5.3 Что такое абсолютная и условная сходимость?

6. Список справочной литературы

6.7. Богомолов Н.В., Самойленко П.И. Математика. Учебник. - М: Дрофа, 2011-395с.
6.8. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике. Учебное пособие. – М: Дрофа, 2011-204с.
6.9. Конспект лекций.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. **Исследовать на сходимость знакочередующиеся ряды, используя признак Лейбница**

Вариант 1

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{3n-1}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(n+1)!}$

Вариант 2

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{3n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{2n+4}{3n+3}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{6n-1}$

Вариант 3

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{4n-1}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{n^2+1}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{3n}{5n+2}$

Вариант 4

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{n}{2n-1}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(2n)!}$

2. **Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд**

Вариант 1

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n \cdot 3^n}$$

Вариант 2

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(n+1) \cdot 2^n}$$

Вариант 3

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Вариант 4

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{(n+1)!}$$

Практическая работа №13

Тема работы: Понятие множества. Задание множеств. Операции над множествами и их свойства. Отношения. Свойства отношений.

Цель работы: познакомиться с основными понятиями теории множеств. Научиться выполнять операции над множествами, строить диаграммы Эйлера – Венна.

Образец выполнения заданий:

Пример 1. Даны два множества A = {0,1,2,3,4,5,6}, B = {-2,-1,0,1,2,10}. Найти множества A∪B, A∩B, A\B, B\A.

Решение:

A∪B = {-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,10} – все элементы двух множеств без повторов в порядке возрастания,

A∩B = {0,1,2} – только одинаковые элементы двух множеств,

A\B = {3,4,5,6} – элементы из A, которых нет B,

B\A = {-2,-1,10} – элементы из B, Которых нет в A;

A∆B = {-2,-1,3,4,5,6,10} – объединение без пересечения.

|A| = 7, |B| = 6 – количество элементов в каждом множестве.

Пример 2. Даны множества **A = {a, e, *f*, j, k}, B = { *f*, i, j, *l*, y}, C = {j, k, *l*, y}.** Найдите множество X = (A∩C)∪(B∩C). Составьте диаграмму Эйлера-Венна.

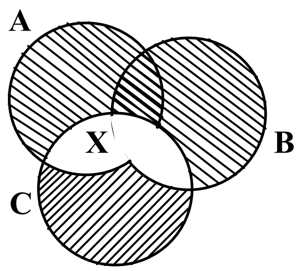
Решение:

Определим элементы множества X = (A∩C)∪(B∩C). Для этого найдём сначала пересечение множеств (A∩C). Элементы **j** и **k** одновременно принадлежат множеству **A** и **C**, следовательно, (A∩C) = { j , k }. Аналогично, (B∩C) = { j , l , y }. Таким образом, объединение (A∩C)∪(B∩C) = { j , k , l , y }.

Для построения диаграммы Венна рассмотрим, как связаны между собой множества A, B и C; в примере все три множества пересекаются между собой:

(A∩B) = { *f* ; j }; (A∩C) = { j ; k }; (B∩C) = { j ; *l* ; y }; (A∩B∩C) = { j }.

Выбираем схему их взаимного расположения и штрихуем ту область, которая соответствует множеству X.



Задания для практической работы.

Задание 1: Даны множества A и B. Найти множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$. Вычислите мощности этих множеств.

Вариант 1 A = {0,1,2,3,4,5}, B = {-2,-1,0,1,2};

Вариант 2 A = {2,4,6,8,10}, B = {0,4,8,12,16};

Вариант 3 A = {1,3,5,7,9}, B = {0,3,6,9,12,15};

Вариант 4 A = {-3,-1,0,1,3}, B = {0,1,2,3,4,5};

Вариант 5 A = {-2,-1,0,1,2}, B = {-4,-2,0,2,4};

Вариант 6 A = {0,1,3}, B = {2,4,6,8,10};

Вариант 7 A = {-4,-2,0,2,4}, B = {0,1,2,3,4,5};

Вариант 8 A = {2,4,6,8,10}, B = {-2,-1,0,1,2};

Вариант 9 A = {-3,-1,0,1,3}, B = {-4,-2,0,2,4};

Вариант 10 A = {0,1,2,3,4,5}, B = {-3,-2,-1}.

Задание 2: Даны 4 множества: A, B, C и D. Найти множества X и Y. Составьте диаграмму Эйлера – Венна для множества Y.

Вариант 1 Дано: $A = \{b, e, f, k, t\}$; $B = \{f, i, j, p, y\}$; $C = \{j, k, l, y\}$; $D = \{i, j, s, t, u, y, z\}$;

Найти: $X = (A\cap D)\cup(B\cap C)$ и $Y = (A\setminus C)\cap B$

Вариант 2 Дано: $A = \{a, h, m, o, r\}$; $B = \{j, k, o, u, y\}$; $C = \{g, h, j\}$; $D = \{g, j, q\}$;

Найти: $X = (A\cap C)\cup(D\cap B)$ и $Y = (C\setminus D)\cap A$

Вариант 3 Дано: $A = \{c, e, h, n\}$; $B = \{e, f, k, n, x\}$; $C = \{b, c, h, p, r, s\}$; $D = \{b, e, g\}$;

Найти: $X = (A\setminus B)\cap(C\cup D)$ и $Y = (A\cap B)\setminus D$

Вариант 4 Дано: $A = \{b, f, g, m, o\}$; $B = \{b, g, h, l, u\}$; $C = \{e, f, m\}$; $D = \{e, g, l, p, q, u, v\}$;

Найти: $X = (A\cap C)\cup(B\setminus D)$ и $Y = (A\cup C)\cap D$

Вариант 5 Дано: $A = \{a, e, f, i\}$; $B = \{a, b, k, n\}$; $C = \{e, f, n, o, w, x\}$; $D = \{a, d, e, o, p, t, u\}$;

Найти: $X = (A\cup B)\cap D\setminus C$ и $Y = (C\setminus D)\cap A$

Вариант 6 Дано: $A = \{a, h, k\}$; $B = \{c, d, h, p, r\}$; $C = \{h, i, s\}$; $D = \{c, g, j, v, w\}$;

Найти: $X = (A\cup B)\cap(C\cup D)$ и $Y = (A\cap C)\cup B$

Вариант 7 Дано: $A = \{a, b, g, k, m, p\}$; $B = \{b, e, f, l, r\}$; $C = \{k, l, w, x\}$; $D = \{e, j, o, p, q, u, v\}$;

Найти: $X = (A\setminus B)\cap(C\cup D)$ и $Y = B\setminus C\setminus D$

Вариант 8 Дано: $A = \{c, m, n, o, q\}$; $B = \{c, d, m, w\}$; $C = \{m, n, q\}$; $D = \{c, m, p\}$;

Найти: $X = (A\cup B)\cap(C\setminus D)$ и $Y = (A\setminus C)\cap B$

Вариант 9 Дано: $A = \{b, d, l, p\}$; $B = \{b, d, e, l, p, x\}$; $C = \{k, l, p, t\}$; $D = \{d, k, o, p, q, u, v\}$;

Найти: $X = (A\setminus B)\cap(C\Delta D)$ и $Y = (A\cap B)\setminus C$

Вариант 10 Дано: $A = \{a, b, f, g, i\}$; $B = \{c, f, g, i, s, v\}$; $C = \{a, g, h, i\}$; $D = \{f, w, x\}$;

Найти: $X = (A\cap B)\cup C\setminus D$ и $Y = (C\cup D)\setminus B$

Критерий оценки:

«5» - правильно выполнены 2 задания;

«4» - выполнены 2 задания, но есть 1 ошибка или отсутствует диаграмма;

«3» - правильно выполнено 1 задание.

Контрольные вопросы:

1) Что такое множество? 2) Что такое элемент множества? 3) Способы задания множества. 4) Что такое подмножество? 5) Какие множества называются равными? 6) Что такое пересечение множеств? 7) Что называется объединением множеств? 8) Что называется разностью и симметрической разностью множеств? 9) Что такое пустое множество?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 14

Тема: Случайные события, их виды. Вероятность случайного события. Операции над событиями. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности.

1. Цель занятия: отработать навык решения задач по данной теме.

2. Перечень справочной литературы:
2.1. Конспект
2.2. Башмаков М.И. Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия: Учебник для СПО.- М.: Академия, 2022*(Основное печатное издание – ОПИ 1.).*

2.3 Башмаков М.И. Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Сборник задач профильной направленности: Учебное пособие для СПО.- М.: Академия, 2018.- 208с. *(Основное печатное издание – ОПИ 2.).*

3. Краткие теоретические сведения:
1. Элементы комбинаторики.

Размещения – упорядоченные выборки k элементов из n $(k \leq n)$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Перестановки – выборки, которые отличаются только порядком расположения элементов.

$$\mathrm{P}_n = n! \ \left(\mathrm{P}_n = A_r^n\right)$$

Сочетания – неупорядоченные выборки k элементов из n элементов $(k \leq n)$.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ или } C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

Бином Ньютона: $(a+b)^n = C_n^o a^n b^o + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + C_n^n a^o b^n$, где C_n^k – биноминальные коэффициенты.

2. Элементы теории вероятности.

Пусть A – событие, его вероятность, $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{m}{n}$, где m – число исходов благоприятствующих событию A, n – число всех исходов.

Если A и B несовместные события, то:

$$\mathrm{P}(A+B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$$

$$\mathrm{P}(A \cdot B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$$

Если A и B – произвольные события, то:

$$\mathrm{P}(A+B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB)$$

$$\mathrm{P}(A \cdot B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B \setminus A) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A / B)$$

Примеры решения задач:

<u>Задание 1.</u>

Решить уравнение $A_{n-2}^{3} = 4A_{n-3}^{2}$

$\frac{(n-2)!}{(n-5)!} = 4 \cdot \frac{(n-3)!}{(n-5)!}$ откуда $n-2=4,\ n=6.$

Задание 2.

В урне 12 белых и 8 черных шаров. Вынимают на удачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?

$C_{20}^{2} = \frac{20!}{18!2!} = \frac{19 \cdot 20}{2} = 190 -$ число возможных случаев сочетаний по два.

$C_{8}^{2} = \frac{8!}{6!2!} = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28 -$ число возможных случаев появления двух черных шаров.

$\mathrm{P} = \frac{28}{190} = \frac{14}{95} = 0{,}147 -$ вероятность появления двух черных шаров.

Задание 3.

У продавца имеется 10 красных, 8 синих, 5 зеленых и 15 желтых шаров. Вычислить вероятность того, что купленный шар окажется красным, синим или зеленым.

Пусть событие $A -$ купленный шар красный

событие $B -$ купленный шар синий

событие $C -$ купленный шар зеленый.

$\mathrm{P}(A) = \frac{10}{38}, \mathrm{P}(B) = \frac{8}{38}, \mathrm{P}(C)\frac{5}{38}.$

Так как события A, B, C несовместны, то

$$\mathrm{P}(A+B+C) = \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C) = \frac{10}{38}+\frac{8}{38}+\frac{5}{38} = \frac{23}{38} \approx 0{,}605.$$

Задание 4.

В первой урне находятся 6 черных и 4 белых шара, во второй 5 черных и 7 белых шаров. Из каждой урны извлекают по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми?

Пусть событие $A -$ из 1-ой урны извлечен белый шар, событие $B -$ из 2-ой урны извлечен белый шар. Очевидно, события А и В независимы.

$\mathrm{P}(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5},\ \mathrm{P}(B) = \frac{7}{12}.$

$\mathrm{P}(AB) = P(A) \cdot \mathrm{P}(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{12} = \frac{14}{60} = \frac{7}{30}.$

4. Задания:

Вариант 1

1. Вычислить: $A_{10}^{4}, C_{15}^{13}, A_{7}^{3} + A_{6}^{3} + A_{5}^{3}.$
2. Решить уравнение: $C_{x}^{2} = 153$
3. В урне 7 белых и 5 черных шаров. Найти вероятность того, что

а) наудачу вынутый шар окажется черным;

б) два наудачу вынутых шара окажутся черными.

4. В одной урне находятся 4 белых и 8 черных шаров, а в другой 3 белых и 9 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба окажутся белыми

Вариант 2

1. Вычислить: $A_5^8, C_{12}^9, A_5^2 \cdot A_4^2 \cdot A_3^2$.
2. Решить уравнение: $C_x^2 - 2 = 21$
3. В урне 9 синих и 13 зеленых шаров. Найти вероятность того, что
а) наудачу вынутый шар окажется зеленым;
б) два наудачу вынутых шара окажутся зелеными;
4. В одной урне находятся 4 белых и 8 черных шаров, а в другой 3 белых и 9 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба окажутся черными.

Вариант 3
1. Вычислить: $A_{12}^5, C_8^3, C_6^4 + C_5^0$.
2. Решить уравнение: $A_{2x}^3 = 14 \cdot A_x^3$
3. В урне 8 красных и 10 синих шаров. Найти вероятность того, что
а) наудачу вынутый шар окажется синим;
б) два наудачу вынутых шара окажутся синими;
4. В одной урне находятся 5 белых и 4 черных шаров, а в другой 6 белых и 8 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба окажутся белыми.

Вариант 4
1. Вычислить: $A_{10}^3, C_{12}^8, \dfrac{A_6^5 + A_6^4}{A_6^3}$
2. Решить уравнение: $A_x^3 = 12x$
3. В урне 7 белых и 9 черных шаров. Найти вероятность того, что
а) наудачу вынутый шар окажется белым;
б) два наудачу вынутых шара окажутся белыми;
4. В одной урне находятся 5 белых и 4 черных шаров, а в другой 6 белых и 8 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба окажутся черными.

5. Порядок выполнения работы:
5.1. Изучить краткие теоретические сведения
5.2. Решить задания своего варианта

6. Содержание отчета:
6.1. Тема и цель занятия
6.2. Решение заданий
6.3. Ответы на контрольные вопросы

7. Контрольные вопросы:
1. Чему равна вероятность достоверного события?
2. Чему равна вероятность невозможного события?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 15

Тема: Дискретная случайная величина, закон ее распределения. Вычисление числовых характеристик дискретной случайной величины.

1.Цель работы
Научиться:

- изображать графически закон распределения ДСВ, заданный таблично;
- записывать закон распределения ДСВ, заданной содержательным образом;
- рассчитывать вероятности для ДСВ по её распределению;
- записывать распределение функции от одной ДСВ.

2 Перечень справочной литературы

2.1Гмурман В.Е.Теория вероятностей и математическая статистика.- М: Юрайт-Издат, 2023, стр.480

2.2 Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. Учебное пособие- М: Юрайт-Издат, 2023, стр.418

2.3 Конспект лекций.

3 Краткие теоретические сведения.

Случайной величиной (СВ) называют такую величину, которая в результате опыта может принимать те или иные значения, причем до опыта мы не можем сказать, какое именно значение она примет. (Более точно, *C* -это действительная функция, определенная на пространстве элементарных событий Ω).

Случайные величины обозначаются последними буквами латинского алфавита -*X.Y.Z.* Случайные величины могут быть трех типов:

дискретные,

непрерывные.

Дискретная случайная величина (ДСВ) может принимать конечное или бесконечное счетное число значений. Например, подбрасываем монету 5 раз. Случайная величина X— число появлений герба: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Пусть X - дискретная случайная величина, которая принимает значения: $x_1, x_2 \ldots, x_n \ldots$ с некоторой вероятностью p_i, где i = 1, 2,.., n,... Тогда можно говорить о вероятности того, что случайная величина X приняла значение x_i: $Pi=P(X=xi)$.

Значения x_i, и соответствующие p_i представляют в виде таблицы:

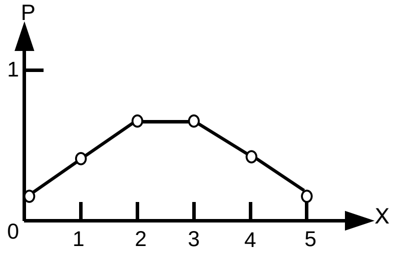
x_i	x_1	x_2	x3	…	x_n	…
p_i	p_1	p_2	p_3	…	p_n	…

Эта таблица является одной из форм задания ДСВ. Обычно случайные величины располагаются в возрастающем порядке.

Основное свойство таблицы заключено в том, что сумма вероятностей равна1:

$$\sum_{i=1}^{\infty} Pi = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n + \ldots = 1.$$

Дискретная случайная величина может быть представлена также в виде многоугольника распределения - фигуры, состоящей из точек $(x_i \ , \ p_i)$, соединенных отрезками:



4 Задание

4.1 В партии из m_1 деталей m_2 нестандартных. Наугад отобраны 3 детали. Составить закон распределения ДСВ - числа стандартных деталей среди отобранных. Построить многоугольник распределения этой ДСВ.

№ варианта	1	2	3	4
m_1	7	8	9	6
m_2	3	4	5	4

4.2 Устройство состоит из 3 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна p. Составить закон распределения ДСВ - числа элементов, отказавших в одном опыте.

№ варианта	1	2	3	4
p	0,1	0,2	0,3	0,4

4.**3** ДСВ X задана законом распределения

x_i	-1	0	1
p_i	p	$1-2p$	p

Найти $p\{X<0\}$, $p\{X>1\}$, $p\{-1<X\le 1\}$. Найти закон распределения ДСВ $Y=2X+3$.

№ варианта	1	2	3	4
p	0,25	0,15	0,35	0,45

4.4 ДСВ X задаётся законом распределения

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1

Найти $p\{X<m_1\}$, $p\{X>m_2\}$, $p\{m_1<X<m_2\}$. Найти закон распределения для случайной величины $Y=(X-5)^2+m_3$.

№ варианта	1	2	3	4
m_1	5	4	6	7
m_2	8	6	9	10
m_3	1	4	3	2

5 Порядок выполнения работы

5.1 Ознакомиться с литературой.

5.2 Решить задачи 4.1-4.4.

5.3 Ответить на контрольные вопросы, используя решения задач 4.1-4.4.

6 Содержание отчёта

6.1 Наименование и цель работы.

6.2 Решение задач 4.1 – 4.4.

7 Контрольные вопросы

7.1 Дайте определение случайной величины (СВ), дискретной случайной величины (ДСВ).

7.2 Дайте определения закона распределения ДСВ.

7.3 Какими способами можно задать распределение ДСВ?

7.4 Как записать закон распределения ДСВ, заданной содержательным образом?

7.5 Как рассчитать вероятности для ДСВ по её распределению?
7.6 Как записать распределение функции от одной ДСВ?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 16

Тема: Понятия о выборке, выборочных распределениях и их графических изображениях, числовых характеристиках выборки.

1.Цель работы

Научиться:

- вычислять оценку генеральной средней;
- вычислять оценку генеральной дисперсии.

2 Перечень справочной литературы

2.1 Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика.- М: Юрайт-Издат, 2023, стр.480

2.2 Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. Учебное пособие- М: Юрайт-Издат, 2023, стр.418

2.3 Конспект лекций.

3 Краткие теоретические сведения

Статистической оценкой неизвестного параметра теоретического распределения называют функцию от наблюдаемых случайных величин. ***Точечной*** называют статистическую оценку, которая определяется одним числом.

Оценкой генеральной средней (математического ожидания) служит выборочная средняя $\overline{x_в} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}$, где x_i-варианта выборки, n_i- частота варианты x_i, n- объём выборки.

Оценкой генеральной дисперсии при $n \geq 30$ служит выборочная дисперсия $D_и = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 = \dfrac{\sum n_i x_i^2}{n} - (\dfrac{\sum n_i x_i}{n})^2$.

Оценкой генеральной дисперсии при $n < 30$ служит ***исправленная выборочная дисперсия*** $s^2 = \dfrac{n}{n-1} \cdot D_и$.

Если первоначальные варианты x_i - большие числа, то для упрощения расчётов нужно вычесть из каждой одно и то же число С, то есть перейти к условным вариантам $u_i = x_i - C$, тогда $\overline{x} = \overline{u} + C$, $D_x = D_u$, $s_x^2 = s_u^2$.

4 Задание

4.1 Из генеральной совокупности извлечена выборка

варианта x_i	x_1	x_2	x_3	x_4
частота n_i	n_1	n_2	n_3	n_4

Найти оценку генеральной средней.

№ варианта	x_1	x_2	x_3	x_4	n_1	n_2	n_3	n_4
1	3	5	8	11	12	8	16	14
2	2	6	8	10	16	9	13	12

3	6	8	9	12	7	13	12	18
4	4	7	10	13	13	7	18	12

4.2 Из генеральной совокупности извлечена выборка

варианта x_i x_1 x_2 x_3 x_4

частота n_i n_1 n_2 n_3 n_4

Найти выборочную среднюю.

№ варианта	x_1	x_2	x_3	x_4	n_1	n_2	n_3	n_4
1	3032	3054	3029	3015	2	3	1	4
2	4254	4265	4248	4239	3	2	3	2
3	1345	1369	1327	1358	4	1	4	1
4	568	574	549	557	1	4	3	2

4.3 Из генеральной совокупности извлечена выборка

варианта x_i x_1 x_2 x_3 x_4

частота n_i n_1 n_2 n_3 n_4

Найти выборочную среднюю, оценку генеральной дисперсии.

№ варианта	x_1	x_2	x_3	x_4	n_1	n_2	n_3	n_4
1	342	359	374	381	12	13	11	14
2	243	238	251	264	13	12	13	12
3	432	452	446	448	14	11	14	11
4	574	568	559	583	11	14	13	12

4.4 В итоге пяти измерений длины стержня одним прибором (без систематических ошибок)

получены следующие результаты (в мм): x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Найти выборочную среднюю длину стержня, выборочную исправленную дисперсию ошибок прибора.

№ варианта	x_1	x_2	x_3	x_4
1	98	96	100	102
2	76	78	80	75
3	67	70	74	69
4	47	50	49	53

4.5 Из генеральной совокупности извлечена выборка

варианта x_i x_1 x_2 x_3 x_4

частота n_i n_1 n_2 n_3 n_4

Найти выборочную среднюю, выборочную исправленную дисперсию.

. № варианта	x_1	x_2	x_3	x_4	n_1	n_2	n_3	n_4
1	0,03	0,05	0,02	0,06	2	3	1	4
2	0,002	0,004	0,001	0,003	3	2	3	2
3	0,004	0,005	0,003	0,002	4	1	4	1
4	0,08	0,07	0,06	0,09	1	4	3	2

5 Порядок выполнения работы

5.1 Ознакомиться с литературой.

5.2 Решить задачи 4.1-4.5

5.3 Ответить на контрольные вопросы, используя решения задач 4.1-4.5

6 Содержание отчёта

6.1 Наименование и цель работы.
6.2 Решение задач 4.1 – 4.5

7 Контрольные вопросы

7.1 Как найти оценку генеральной средней?
7.2 Как найти оценку генеральной дисперсии?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 17

Тема: Вычисление абсолютной и относительной погрешности приближенного числа. Учет погрешностей и правила действий с приближенными числами.

1. Цель занятия: научиться вычислять абсолютную и относительную погрешность, округлять числа. Научиться практически применять абсолютную и относительную погрешности.

2. Перечень справочной литературы:

2.1. Конспект

2.2. Башмаков М.И. Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия: Учебник для СПО.- М.: Академия, 2022*(Основное печатное издание – ОПИ 1.).*

2.3 Башмаков М.И. Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Сборник задач профильной направленности: Учебное пособие для СПО.- М.: Академия, 2018.- 208с. *(Основное печатное издание – ОПИ 2.).*

3. Краткие теоретические сведения:

x – точное значение, a – приближенное значение.

$|x-a| = \Delta x$ - абсолютная погрешность приближения.

Число Δx называют границей абсолютной погрешности приближенного числа a.

$x = a \pm \Delta x \Leftrightarrow a - \Delta x \le x \le a + \Delta x$

$\frac{|\Delta x|}{|a|} = \frac{|x-a|}{|a|}$ - относительная погрешность приближения.

Правило округления чисел с наименьшей погрешностью:

1) единицы младших разрядов отбрасываются;

2) число единиц данного разряда не меняется, если следующая цифра данной дроби меньше 5, и увеличивается на единицу, если следующая цифра больше или равна 5.

Погрешность суммы: граница абсолютной погрешности суммы приближенных значений равна сумме границ абсолютных погрешностей слагаемых, т.е. если $x \approx a$ с точностью до h_1, $y \approx в$ с точностью до h_2, то
$x + y \approx a + в$ с точностью до $h = h_1 + h_2$.

Погрешность разности: граница абсолютной погрешности разности приближенных значений равна сумме границ абсолютных погрешностей уменьшаемого и вычитаемого, т.е. если $x \approx a$ с точностью до h_1, $y \approx в$ с точностью до h_2, то $x - y \approx a - в$ с точностью до $h = h_1 + h_2$.

Примеры решения задач:

<u>Задание 1.</u>

Даны приближенные значения числа: $x = \frac{2}{3}; a_1 = 0,6; a_2 = 0,66; a_3 = 0,67.$

Какое из этих трех приближений является лучшим?

$\Delta x_1 = \left|\frac{2}{3} - 0,6\right| = \frac{1}{15}$, $\Delta x_2 = \left|\frac{2}{3} - 0,66\right| = \frac{1}{150}$, $\Delta x_3 = \left|\frac{2}{3} - 0,67\right| = \frac{1}{300}$

Лучшим приближенным числа x является $a_3 = 0,67$.

Задание 2.

Граница абсолютной погрешности приближенного значения 386 числа x равна 0,5. Укажите границы, в которых заключено число x.

386 – 0,5 = 385,5; 386 + 0,5 = 386,5

385,5 < x < 386,5

Задание 3.

При измерении длины *l* и диаметра *d* получили:

*l = (10,0 ± 0,1)*м, *d= (2,5 ± 0,1)*мм.

Какое из этих измерений точнее?

Их относительные погрешности:

$\frac{0,1}{10} = 0,01$ и $\frac{0,1}{2,5} = 0,04$

Следовательно, измерение длины проводника выполнено точнее.

Задание 4.

Пусть x = 274,61. Выполнить округление до десятых, единиц, десятков и сотен (с наименьшей погрешностью).

Согласно правилу округления десятичных дробей имеем: 274,6; 275; 270; 300.

Ошибки этих округлений соответственно равны: 0,01; 0,39; 4,61; 25,39.

Задание 5.

Найти периметр треугольника *ABC*, если *|AB| = 63,4 ± 0,1,*

|BC| = 47,8 ± 0,1, |AC| = 73,1 ± 0,1

P = |AB| + |BC| + |AC|

P ≈ 63,4 + 47,8 + 73,1 = 184,3 с точностью до *h = 0,1 + 0,1 + 0,1 = 0,3*

P = 184,3 ± 0,3

4. Задания:

4.1. Найти абсолютную и относительную погрешность приближенного значения a величины x.

Вариант 1

$x = \frac{5}{3}; a = 1,6$

Вариант 2

$x = -\frac{5}{3}; a = 1,66$

Вариант 3

$x = \frac{3}{11}; a = 0,273$

Вариант 4

$x = \frac{3}{11}; a = 0,2727$

4.2. Найти границы числа.

Вариант 1

Амперметр дает точность ± 0,02 А. При измерении силы тока получили 10,63 А. Укажите границы этого числа.

Вариант 2

Атомная масса водорода 1,0082 ± 0,005. Укажите границы этого числа.

Вариант 3

Атомная масса меди 63,44 ± 0,15. Укажите границы этого числа.

Вариант 4

Площадь квадрата равна 24,5 ± 0,3 см^2. Найти границы измерения площади квадрата.

4.3. Найти сумму приближенных значений чисел.

Вариант 1.

Электрическая цепь состоит из трех последовательно соединенных проводников с сопротивлениями:

$ч_1$= 4,8 ± 0,05 Ом,

$ч_2$= 6,25 ± 0,005 Ом,

$ч_3$= 7,725 ± 0,0005 Ом.

Вычислить общее сопротивление цепи по формуле $R= ч_1+ ч_2+ ч_3$

Вариант 2

В треугольнике ABC:

AB= 6,8 ± 0,05 см,

BC= 4,3 ± 0,05 см,

AC= 3,575 ± 0,005 см.

Найти периметр треугольника ABC.

Вариант 3

Показания трёх амперметров:

I_1= 6,8 ± 0,05 А,

I_2=4,3 ± 0,05 А,

I_3=3,575 ± 0,005 А.

Найти общую силу тока по формуле $I= I_1 + I_2 + I_3$

Вариант 4

Электрическая цепь состоит из трех последовательно соединенных проводников с сопротивлениями:

$ч_1$= 6,54 ± 0,005 Ом,

$ч_2$= 10,022 ± 0,0005 Ом,

$ч_3$= 15,46 ± 0,05 Ом.

Вычислить общее сопротивление цепи по формуле $R= ч_1+ ч_2+ ч_3$

5. Порядок выполнения работы:

5.1. Изучить краткие теоретические сведения.

5.2. Решить задания своего варианта.

6. Содержание отчета:

6.1. Тема и цель занятия

6.2. Решение заданий
6.3. Ответы на контрольные вопросы

7. Контрольные вопросы:
7.1. В чём состоит правило сложения и вычитания приближенных значений?
7.2. Что называется границей абсолютной погрешности?