МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ
«РОСТОВСКИЙ-НА-ДОНУ КОЛЛЕДЖ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ, ИНФОРМАЦИОННЫХ И ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»
(ГБПОУ РО «РКРИПТ»)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

ОП.11 КОМПЬЮТЕРНЫЕ СЕТИ

Специальность:
09.02.07 Информационные системы и программирование

Квалификация выпускника:
разработчик веб и мультимедийных приложений

Форма обучения: очная

2023

СОГЛАСОВАНО
Начальник методического отдела
_________ Н.В. Вострякова

«26» апреля 2023 г.

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора
по учебно-методической работе
_________ С.А.Будасова

«26» апреля 2023 г.

ОДОБРЕНО
Цикловой комиссией
ВТ и КС

Пр. № 8 от «26» апреля 2023 г.
Председатель ЦК
_________ Е.И. Кучпова

Методические указания по выполнению практических (лабораторных) работ разработаны в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины **ОП.11 Компьютерные сети** специальности **09.02.07 Информационные системы и программирование**

Разработчик: Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение Ростовской области «Ростовский-на-Дону колледж радиоэлектроники, информационных и промышленных технологий» (ГБПОУ РО «РКРИПТ»)

Введение

Методические указания к выполнению практических занятий по дисциплине ОП.01 Элементы высшей математики предназначены для закрепления теоретических знаний, полученных на лекциях, а также для овладения обучающимися умений и навыков применять эти знания при самостоятельной работе.

Перечень практических занятий соответствует рабочей программе по дисциплине ОП.01 Элементы высшей математики.

Методические указания выполняют функцию управления самостоятельной работой обучающегося, поэтому каждое занятие имеет унифицированную структуру, включающую определение целей занятия, оборудования занятия, порядок выполнения работы, а также задания и контрольные вопросы для закрепления темы.

В результате выполнения практических работ студент должен:

уметь:

- выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;
- применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
- решать дифференциальные уравнения;

знать:

- основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии;
- основы дифференциального и интегрального исчисления

Практическое занятие №1

Тема: Решение систем линейных уравнений методом Крамера и методом Гаусса.

1. **Цель работы:** получить практические навыки решения систем линейных уравнений различными способами.
2. **Время выполнения работы:** 2 академических часа

3. **Краткие теоретические сведения:**

Вычисление определителей 2-го порядка.

Рассмотрим определитель второго порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Правило вычисления определителя второго порядка:

определитель второго порядка равен ***произведению элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали***, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{22}.$$

Вычисление определителей 3-го порядка.

Определитель 3-го порядка вычисляют двумя способами: **по правилу треугольников** и **разложением определителя по элементам какой-либо строки (столбца)**

Правило треугольников.

В этом случае значение определителя вычисляют как сумму шести слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение трёх элементов определителя, выбираемых по следующему правилу: три произведения элементов, стоящих на главной диагонали и в вершинах двух треугольников

$$\begin{vmatrix} \otimes & \otimes & \otimes \\ \otimes & \otimes & \otimes \\ \otimes & \otimes & \otimes \end{vmatrix}$$

берутся со знаком +,

а три произведения элементов, стоящих на побочной диагонали и в вершинах двух других треугольников

$$\begin{vmatrix} \otimes & \otimes & \otimes \\ \otimes & \otimes & \otimes \\ \otimes & \otimes & \otimes \end{vmatrix}$$

берутся со знаком минус, т.е. вычисление определителя выполняется по следующей схеме:

$$\begin{vmatrix} \otimes & \otimes & \otimes \\ \otimes & \otimes & \otimes \\ \otimes & \otimes & \otimes \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \otimes & \otimes & \otimes \\ \otimes & \otimes & \otimes \\ \otimes & \otimes & \otimes \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \otimes & \otimes & \otimes \\ \otimes & \otimes & \otimes \\ \otimes & \otimes & \otimes \end{vmatrix}$$

Разложение определителя по элементам какой-либо строки (столбца).

В данном случае значение определителя находят как сумму произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на их **алгебраические дополнения**:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} \text{ -}$$

разложение по элементам i-ой строки; $i = 1;2;3$.

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} \text{ -}$$

разложение по элементам j-ого столбца; $j = 1;2;3$.

Метод Крамера решения систем линейных уравнений.

Решение квадратной системы n линейных уравнений с n неизвестными в этом случае находят по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \text{ -}$$

основной определитель системы,

Δ_1, $\Delta_2, \ldots, \Delta_n$ - вспомогательные определители, получаемые из основного заменой j-го столбца на столбец свободных членов.

Если основной определитель системы $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение (**совместна и определена**).

Если основной определитель и вспомогательные определители равны 0, т.е.

$$\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = \Delta_n,$$

то система имеет бесконечное множество решений (**совместна и не определена**).

Если основной определитель системы $\Delta = 0$ и какой-либо вспомогательный определитель отличен от 0, то система **несовместна**, т.е. решений не имеет.

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

Суть метода Гаусса состоит в следующем:

1. Составляют расширенную матрицу системы (записывают матрицу коэффициентов, через вертикальную черту от неё записывают столбец свободных членов)
2. С помощью элементарных преобразований основную матрицу системы (матрицу коэффициентов) приводят к единичному виду. Тогда в столбце свободных членов получают решение системы.

2. Методика решения типовых задач

2.1 Пример 1**.** Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$.

Решение. По правилу вычисления определителя 2-го порядка имеем:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2\cdot 7 - 3\cdot 4 = 14 - 12 = 2.$$

Пример 2. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} \log_2 8 & \log_{\frac{1}{3}} 27 \\ \log_5 1 & \lg 1000 \end{vmatrix}$.

Решение. Заменим логарифмы, являющиеся элементами определителя, их значениями:

$$\log_2 8 = 3, \quad \log_{\frac{1}{3}} 27 = -3, \quad \log_5 1 = 0, \quad \lg 1000 = 3,$$

тогда получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 3 - 0\cdot(-3) = 9.$$

Пример 3. Вычислить определитель 3-го порядка $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix}$ по правилу треугольников:

Решение.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix} - \left\|\begin{matrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \end{matrix}\right\| = 2\cdot(-2)\cdot 9 + 3\cdot 3\cdot 2 + (-1)\cdot 4\cdot 5 -$$

$$-\left(2\cdot(-2)\cdot 5 + (-1)\cdot 3\cdot 9 + 4\cdot 3\cdot 2\right) = -36 + 18 - 20 + 20 + 27 - 24 = -15.$$

Пример 4**.** Вычислить определитель 3-го порядка $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix}$. разложением по элементам какой-либо строки (столбца).

Решение. Вычислим данный определитель разложением по элементам первой строки:

$$\Delta = 1\cdot\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -1 & -5\end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & -5\end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & -1\end{vmatrix} = (-15+1)-(-10-4)+(-2+12) = -14+14+10 = 10.$$

2.2 Пример 5. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$$

Решение. Составим и вычислим основной и вспомогательные определители системы разложением по элементам первой строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ -2 & 3 & -3\\ 3 & -4 & 5\end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix}3 & -3\\ -4 & 5\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 3 & 5\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 3 & -4\end{vmatrix} =$$

$$= 15 - 12 - 2(-10+9) - 1 = 4.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix}8 & 2 & 1\\ -5 & 3 & -3\\ 10 & -4 & 5\end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix}3 & -3\\ -4 & 5\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}-5 & -3\\ 10 & 5\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}-5 & 3\\ 10 & -4\end{vmatrix} =$$

$$= 8(15-12) - 2(-25+30) + (20-30) = 24 - 10 - 10 = 4.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix}1 & 8 & 1\\ -2 & -5 & -3\\ 3 & 10 & 5\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-5 & -3\\ 10 & 5\end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 3 & 5\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}-2 & -5\\ 3 & 10\end{vmatrix} =$$

$$= -25 + 30 - 8(-10+9) - 20 + 15 = 5 + 8 - 5 = 8.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix}1 & 2 & 8\\ -2 & 3 & -5\\ 3 & -4 & 10\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3 & -5\\ -4 & 10\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}-2 & -5\\ 3 & 10\end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 3 & -4\end{vmatrix} =$$

$$= 30 - 20 - 2(-20+15) + 8(8-9) = 10 + 10 - 8 = 12.$$

По формулам Крамера находим неизвестные системы:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{8}{4} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{12}{4} = 3.$$

Ответ: $(1;2;3)$

2.3 Пример 6. Решить методом Гаусса систему уравнений: $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

Решение. Составим расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 13 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Для того, чтобы привести основную матрицу к диагональному виду, будем обнулять все диагональные элементы с помощью элементарных преобразований.

Например, возьмём сначала в качестве ведущего элемента $a_{11} = 1$и обнулим элементы первого столбца из второй и третьей строки с помощью следующих элементарных преобразований:

$$c_2 - c_1, \quad c_3 - 2c_1,$$

тогда получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 13 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -10 \end{array}\right).$$

Теперь в качестве ведущего элемента удобнее выбрать элемент $a_{32} = -1$ и обнулить элементы второго столбца второй и первой строки с помощью следующих элементарных преобразований:

$$c_1 - c_3, \quad c_2 + 3c_3,$$

после чего получим

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -10 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 17 \\ 0 & 0 & -8 & -24 \\ 0 & -1 & -3 & -10 \end{array}\right).$$

Вторую строку последней матрицы можно разделить на -8, а третью строку на -1, тогда имеем

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 17 \\ 0 & 0 & -8 & -24 \\ 0 & -1 & -3 & -10 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right).$$

Теперь выбираем в качестве ведущего элемента $a_{23} = 1$ и обнулим элементы третьего столбца первой и третьей строки с помощью следующих преобразований:

$$c_3 - 3c_2, \quad c_1 - 5c_2,$$

тогда получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Для того чтобы привести основную матрицу к единичному виду и получить окончательный ответ, переставим местами вторую и третью строку матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Ответ: $(2; 1; 3)$.

4. Порядок выполнения практической работы

4.1 Изучить краткие теоретические сведения.
4.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
4.3 Ответить на контрольные вопросы

5. Содержание отчёта

5.1Тема и цель работы.
5.2Решение заданий.
5.3Ответы на контрольные вопросы.

6. Контрольные вопросы

6.1Что называется определителем?
6.2Что называется элементами определителя?
6.3Что называется порядком определителя?
6.4 Сформулируйте правило вычисления определителя второго порядка.
6.5 Что называется минором элемента определителя?
6.6 Что называется алгебраическим дополнением элемента определителя?
6.7 Какими способами вычисляются определители третьего порядка. В чём заключается каждый из этих способов?
6.8 Что значит решить систему линейных уравнений?
6.9 Что представляет собой решение системы n линейных уравнений с n неизвестными?
6.10 Как называется система, имеющая решения?
6.11 Как называется система, имеющая одно решение?
6.12 Как называется система, имеющая более одного решения?
6.13 Как называется система, не имеющая ни одного решения?
6.14 Запишите формулы Крамера для решения систем линейных уравнений.
6.15 В чём заключается метод Гаусса решения систем линейных уравнений?

7. Список литературы

7.1 Алексеева Е.В. Основы линейной алгебры: учебное пособие для студентов 2-го курса технических специальностей по разделу дисциплины «Элементы высшей математики», «Математика».
7.2 Конспект теоретических занятий

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВАРИАНТ 1	ВАРИАНТ 2
№1. Вычислить определители 2-го порядка: $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 15 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$ №2. Вычислить определитель 3-го порядка разложением по элементам какой-либо строки (столбца) и правилу треугольников: $\begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ №3. Решить систему уравнений методом Крамера, методом Гаусса: $\begin{cases} -3x + y + 3z = 10, \\ -2y - z = -4, \\ 2x - y + 3z = 3 \end{cases}$	№1. Вычислить определители 2-го порядка: $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}$ №2. Вычислить определитель 3-го порядка разложением по элементам какой-либо строки (столбца) и правилу треугольников: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix}$ №3. Решить систему уравнений методом Крамера, методом Гаусса: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -15, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ -2x_1 + 3x_3 = 7 \end{cases}$
ВАРИАНТ 3	**ВАРИАНТ 4**
№1. Вычислить определители 2-го порядка: $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -10 & -4 \end{vmatrix}$ №2. Вычислить определитель 3-го порядка разложением по элементам какой-либо строки (столбца) и правилу треугольников: $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ №3. Решить систему уравнений методом Крамера, методом Гаусса:	№1. Вычислить определители 2-го порядка: $\begin{vmatrix} 13 & 12 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -18 & 30 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}.$ №2. Вычислить определитель 3-го порядка разложением по элементам какой-либо строки (столбца) и по правилу треугольников: $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -4 \\ -5 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$ №3. Решить систему уравнений методом Крамера, методом Гаусса:

<table>
<tr>
<td>

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 = -4, \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 = -6, \\ x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

</td>
<td>

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -11, \\ -2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

ВАРИАНТ 5

</td>
<td>

ВАРИАНТ 6

</td>
</tr>
<tr>
<td>

№1. Вычислить определители 2-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 21 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

№2. Вычислить определитель 3-го порядка разложением по элементам какой-либо строки (столбца) и правилу треугольников:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

№3. Решить систему уравнений методом Крамера, методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 5, \\ -2x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -4 \end{cases}$$

</td>
<td>

№1. Вычислить определители 2-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 14 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}$$

№2. Вычислить определитель 3-го порядка разложением по элементам какой-либо строки (столбца) и правилу треугольников:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & = 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

№3. Решить систему уравнений методом Крамера, методом Гаусса:

$$\begin{cases} x - 3y + z = -2, \\ x - 2y - 4z = -11, \\ -2x - y = 1 \end{cases}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

ВАРИАНТ 7

</td>
<td>

ВАРИАНТ 8

</td>
</tr>
<tr>
<td>

№1. Вычислить определители 2-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

№2. Вычислить определитель 3-го порядка разложением по элементам какой-либо строки (столбца) и правилу треугольников:

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

№3. Решить систему уравнений методом Крамера, методом Гаусса:

</td>
<td>

№1. Вычислить определители 2-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}$$

№2. Вычислить определитель 3-го порядка разложением по элементам какой-либо строки (столбца) и правилу треугольников:

$$\begin{vmatrix} 1 & -8 & 2 \\ -3 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

№3. Решить систему уравнений методом Крамера, методом Гаусса:

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td>

$$\begin{cases} 2x + y - z = 4, \\ x + 2y + z = 5, \\ 5x - y + 3z = 12 \end{cases}$$

</td><td>

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 3, \\ 5x - 2y - 2z = 3, \\ x + y - z = -2 \end{cases}$$

</td></tr>
<tr><td>ВАРИАНТ 9</td><td>ВАРИАНТ 10</td></tr>
<tr><td>

№1. Вычислить определители 2-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$$

№2. Вычислить определитель 3-го порядка разложением по элементам какой-либо строки (столбца) и правилу треугольников:

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & -10 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

№3. Решить систему уравнений методом Крамера, методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 5, \\ 5x - 6y - 4z = -3, \\ -4x + 5y + 3z = 1 \end{cases}$$

</td><td>

№1. Вычислить определители 2-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

№2. Вычислить определитель 3-го порядка разложением по элементам какой-либо строки (столбца) и правилу треугольников:

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

№3. Решить систему уравнений методом Крамера, методом Гаусса:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 3, \\ 3x + y - 6z = -7, \\ 9x - 2y - z = 3 \end{cases}$$

</td></tr>
</table>

Практическое занятие №2

Тема: Выполнение действий над матрицами. Нахождение обратной матрицы. Решение систем линейных уравнений матричным методом

1. **Цель работы:** получить практические навыки вычисления определителей, действий с матрицами и решения систем линейных уравнений.
2. **Время выполнения работы:** 2 академических часа
3. **Краткие теоретические сведения:**

Операции над матрицами.

1. Умножение матрицы на число.

Матрицу можно умножать на число, при этом каждый элемент матрицы умножают на это число.

2. Сложение матриц.

Складывать можно матрицы только одного размера, при этом матрицы складываются поэлементно, т.е. суммой матриц $\underset{mxn}{A}+\underset{mxn}{B}$ с элементами a_{ij} и b_{ij} соответственно является матрица $\underset{mxn}{C}$ с элементами $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

3. Вычитание матриц.

Вычитание матриц производится аналогично сложению.

4. Умножение матриц.

Умножать можно только две ***согласованные*** матрицы, т.е. такие, что число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Произведением матриц $\underset{mxk}{A}\cdot\underset{kxn}{B}$ называется такая матрица $\underset{mxn}{C}$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ik}b_{kj}=\sum_{s=1}^{k}a_{is}b_{sj}.$$

$$\left(i=1\div m, j=1\div m\right)$$

5. Возведение в степень.

Целой положительной степенью A^m квадратной матрицы A называется произведение m матриц, равных A, т.е.

$$A^m=A\cdot A\cdot A\ldots A.$$

Из определения ясно, что операция возведения в степень определена только для квадратных матриц.

6. Транспонирование матрицы.

Транспонирование матрицы - это переход от матрицы A к матрице A^T, получаемой из исходной матрицы переменой местами строк и столбцов.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2}\dots a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21}\dots a_{m1} \\ a_{12} & a_{22}\dots a_{m2} \\ \dots\dots\dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n}\dots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица.

Матрица A^{-1} *называется* ***обратной по отношению к квадратной матрице*** A**,** *если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица* E, т.е.

$$A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E.$$

Правило нахождения обратной матрицы:

1. Находим определитель исходной матрицы. Если $\Delta A \neq 0$, то обратная матрица существует и единственная.
2. Находим обратную матрицу по формуле:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21}\dots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22}\dots A_{n2} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots \\ A_{1n} & A_{2n}\dots A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} - алгебраические дополнения к элементам a_{ij} матрицы A.

3. Проверяем правильность нахождения обратной матрицы по формуле

$$A\cdot A^{-1} = 1.$$

Решение систем n линейных уравнений с n неизвестными матричным способом.

Пусть есть квадратная система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n2}x_3 + \ldots + a_{nn}x_x = b_n \end{cases}$$

Решением данной системы будет
будет матрица – столбец X, которую находят по формуле

$$X = A^{-1}\cdot B.$$

где $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}..a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}..a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2}..a_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица коэффициентов системы, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ - матрица-столбец переменных, $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$ - матрица-столбец свободных членов.

4. Методика решения типовых задач

2.1 Пример 1**.** Вычислить произведение матриц $A \cdot B$, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрицы A и B являются согласованными, т.к. матрица A имеет 3 столбца, а матрица B имеет 3 строки, поэтому умножение матриц возможно и в результате получим матрицу $\underset{2x3}{A} \cdot \underset{3x3}{B} = \underset{2x3}{C}$.

Вычислим элементы матрицы-произведения C следующим образом:

$$C=\begin{pmatrix} 1\cdot(-1)+0\cdot 5+2\cdot(-2) & 1\cdot 0+0\cdot 1+2\cdot 1 & 1\cdot 1+0\cdot 4+2\cdot 1 \\ 3\cdot(-1)+1\cdot 5+0\cdot(-2) & 3\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 0 & 3\cdot 1+1\cdot 4+0\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Пример 2**.** Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти: $C=2A+3B^m$

Решение. Найдём

$$2A=2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B^m=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$3B^m = 3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 3 & 0 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix},$$

подставим в выражение для матрицы C найденные матрицы $2A$ и $3B^m$, окончательно получим:

$$C = 2A + 3B^m = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 3 & 0 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 15 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

2.2 Пример 3**.** Найти матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Вычислим определитель матрицы A:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 + 4 - 1 + 2 - 1 = 5 \neq 0$$

Т.к. $\Delta A \neq 0$, то обратная матрица существует.

Найдём A_{ij}:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4-1) = -3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1(-2-1) = 3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1+1) = -2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1-2) = 1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3.$$

Найдём обратную матрицу по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

2.3Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases} \quad \text{матричным способом.}$$

Решение. Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Тогда в матричной форме данная система имеет вид:

$$A \cdot X = B.$$

Вычислим определитель матрицы A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 + 4 - 1 + 2 - 1 = 5 \neq 0$$

Т.к. $\det A \neq 0$, то матрица A - невырожденная и существует и единственна обратная матрица A^{-1}.

Обратную матрицу A^{-1} находим по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Вычислим A_{ij}:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \qquad A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Получили

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

тогда

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 3\cdot 11 - 2\cdot 8 \\ -3\cdot 3 + 1\cdot 11 + 1\cdot 8 \\ 1\cdot 3 - 2\cdot 11 + 3\cdot 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $(4;2;1)$.

4. Порядок выполнения практической работы

4.1 Изучить краткие теоретические сведения.
4.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
4.3 Ответить на контрольные вопросы

5. Содержание отчёта

5.1 Тема и цель работы.
5.2 Решение заданий.
5.3 Ответы на контрольные вопросы.

6. Контрольные вопросы

6.1 Дайте определение матрицы.
6.2 Что называется элементами матрицы?
6.3 Как выполняют сложение (вычитание) матриц?
6.4 Как матрицу умножают на число?
6.5 Какие матрицы можно складывать и вычитать?
6.6 Какие матрицы можно умножать драг на друга?
6.7 Как осуществляется умножение матриц?
6.8 Какую матрицу можно возводить в целую положительную степень?
6.9 Что представляет собой матрица A^m?
6.10 Как осуществляется операция транспонирования матриц?
6.11 Какая матрица называется обратной к данной матрице?
6.12 Какие матрицы могут иметь обратные матрицы?
6.13 Сформулируйте необходимое и достаточное условия существования обратной матрицы.
6.14 Сформулируйте правило нахождения обратной матрицы.
6.15 Какие элементарные преобразования можно выполнять с матрицами?
6.16 Запишите формулу решения системы линейных уравнений матричным способом.

7.Список справочной литературы

7.1 Алексеева Е.В. Основы линейной алгебры: учебное пособие для студентов 2-го курса технических специальностей по разделу дисциплины «Элементы высшей математики», «Математика».

7.2 Конспект теоретических занятий

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВАРИАНТ 1	**ВАРИАНТ 2**
№1. Даны матрицы: $A=\begin{pmatrix}2&1&4\\3&0&1\\-2&3&-1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2&0&3\\-4&1&1\\3&-1&-5\end{pmatrix}$ Найти: $3A^m-2B+B^{-1}$ №2. Решить систему матричным методом: $\begin{cases}3x+4y+2z=5,\\5x-6y-4z=-3,\\-4x+5y+3z=1\end{cases}$	№1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}2&1&4\\3&0&1\\-2&3&-1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2&0&3\\-4&1&1\\3&-1&-5\end{pmatrix}$ Найти: $2B^m+3A-A^{-1}$ №2. Решить систему матричным методом: $\begin{cases}x-2y+3z=3,\\3x+y-6z=-7,\\9x-2y-z=3\end{cases}$
ВАРИАНТ 3	**ВАРИАНТ 4**
№1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}2&1&4\\3&0&1\\-2&3&-1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2&0&3\\-4&1&1\\3&-1&-5\end{pmatrix}$ Найти: $5A^m-3B+B^{-1}$ №2. Решить систему матричным методом: $\begin{cases}2x+y-z=4,\\x+2y+z=5,\\5x-y+3z=12\end{cases}$	№1. Даны матрицы: $A=\begin{pmatrix}2&1&4\\3&0&1\\-2&3&-1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2&0&3\\-4&1&1\\3&-1&-5\end{pmatrix}$ Найти: $-2B^m+4A-A^{-1}$ №2. Решить систему матричным методом: $\begin{cases}3x+2y+z=3,\\5x-2y-2z=3,\\x+y-z=-2\end{cases}$

Практическое занятие №3

Тема: Решение практических задач при помощи векторного и смешанного произведения.

1. **Цель работы:** получить практические навыки использования векторного и смешанного произведения векторов при решении практических задач.
2. **Время выполнения работы:** 2 академических часа
3. **Краткие теоретические сведения:**

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Обозначается: $\vec{a}\cdot\vec{b}$. Таким образом,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ и $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$, то **скалярное произведение** можно вычислить по формуле:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$$

Длина вектора $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ вычисляется по формуле:

$$|\vec{a}|=\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}}$$

или по формуле:

$$|\vec{a}|=|\vec{AB}|=\sqrt{(x_к-x_н)^2+(y_к-y_н)^2+(z_к-z_н)^2},$$

где даны координаты точек $A=(x_н;y_н;z_н)$ - начало вектора и $B=(x_к;y_к;z_к)$ - конец вектора.

Угол между векторами $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ и $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$ вычисляется по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}}\cdot\sqrt{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}+z_2^{\,2}}}.$$

Три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, взятые в указанном порядке, образуют **правую(левую) тройку**, если с конца вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки, (соответственно, по часовой стрелке).

Векторным произведением неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, определяемый условиями:

1)длина вектора $\vec{c}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах, т.е. $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$;

2)вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. $\vec{c}\perp\vec{a}$ и $\vec{c}\perp\vec{b}$;

3)векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку.
Векторное произведение обозначается $\vec{a}\times\vec{b}$ или $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$

Если векторы **коллинеарные**, то $\vec{a}\times\vec{b}=0$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ и $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$, то **векторное произведение** можно вычислить по формуле:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix} \text{ или } \vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right)$$

Для вычисления **площади параллелограмма**, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ применяется формула: $S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению векторов $\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$.
Обозначается смешанное произведение: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Таким образом: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$

Геометрически смешанное произведение интерпретируется как *число, равное объему параллелепипеда, построенного на векторах* $\vec{a}$*,* $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$*, как на ребрах.* Смешанное произведение положительно, если данные векторы образуют правую тройку, и отрицательно – если левую.

Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ **компланарные**, то $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$

Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ заданы своими координатами $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ и $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$, $\vec{c}=(x_3;y_3;z_3)$ то **смешанное произведение** можно вычислить по формуле:

$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$.Если $\vec{a}\vec{b}\vec{c}\succ 0$, то $\vec{a}$ **,** $\vec{b}$ и $\vec{c}$ - правая тройка, если $\vec{a}\vec{b}\vec{c}\prec 0$, то $\vec{a}$ **,** $\vec{b}$ и $\vec{c}$ - левая тройка.

Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$ **,** $\vec{b}$ и $\vec{c}$ вычисляется по формуле:

$$V=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$$

Объем треугольной пирамиды(тетраэдра), построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ вычисляется по формуле:

$$V = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

2. Методика решения типовых задач

2.1 Пример 1. Даны вершины треугольника $A=(2;3;-1)$, $B=(4;1;-2)$ и $C=(1;0;2)$

Найти внутренний угол при вершине С.

Решение.

Угол φ при вершине С есть угол между векторами $\vec{CB}$ и $\vec{CA}$. Определим координаты этих векторов:

$$\vec{CB} = (4-1;1-0;-2-2) = (3;1;-4),$$

$$\vec{CA} = (2-1;3-0;-1-2) = (1;3;-3).$$

Найдем их длины (модули):

$$\left|\vec{CB}\right| = \sqrt{9+1+16} = \sqrt{26}, \qquad \left|\vec{CA}\right| = \sqrt{1+9+9} = \sqrt{19}.$$

Согласно формуле вычисления угла между векторами, получим:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{CB}\cdot\vec{CA}}{\left|\vec{CB}\right|\cdot\left|\vec{CA}\right|} = \frac{3\cdot 1+1\cdot 3+(-4)(-3)}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{19}} = \frac{18}{\sqrt{494}}.$$

Следовательно, получим:

$$\varphi = \arccos\frac{18}{\sqrt{494}}.$$

2.2 Пример 2. Найти площадь треугольника с вершинами $A=(1;2;0)$, $B=(3;2;1)$ и $C=(-2;1;2)$.

Решение.

Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$, т.е. $S=\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|$. Имеем: $\vec{AB}=(2;0;1)$, $\vec{AC}=(-3;-1;2)$. Тогда по формуле вычисления векторного произведения, получим:

$$\vec{AB}\times\vec{AC} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}\right),$$

т.е. $\vec{AB}\times AC = (1;-7;-2)$. Следовательно, $S=\frac{1}{2}\sqrt{1+49+4}$, $S=\frac{3\sqrt{6}}{2}$.

2.3 Пример 3. Даны вершины пирамиды (тетраэдра) $A=(5;1;-4)$, $B=(1;2;-1)$, $C=(3;3;-4)$, $D=(2;2;2)$

Решение.

Найдем координаты векторов:

$$\vec{AB}=(-4;1;3)$$
$$\vec{AC}=(-2;2;0)$$
$$\vec{AD}=(-3;1;6).$$

И, согласно формуле объема треугольной пирамиды и формуле вычисления смешанного произведения векторов, получим:

$$V=\frac{1}{6}\left|\vec{AB}\cdot\vec{AC}\cdot\vec{AD}\right|=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}-3 & 1 & 6\\ -4 & 1 & 3\\ -2 & 2 & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\left|18-6-36\right|=\frac{1}{6}\left|-24\right|=4$$

4. Порядок выполнения практической работы

4.1 Изучить краткие теоретические сведения.
4.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
4.3 Ответить на контрольные вопросы

5. Содержание отчёта

5.1 Тема и цель работы.
5.2 Решение заданий.
5.3 Ответы на контрольные вопросы.

6.Контрольные вопросы

6.1 Дайте определение скалярного произведения векторов.
6.2 Запишите формулу скалярного произведения векторов.
6.3 Дайте определение векторного произведения векторов.
6.4 Запишите формулу векторного произведения векторов.
6.5 Дайте определение смешанного произведения векторов.
6.6 Запишите формулу смешанного произведения векторов.

7.Список справочной литературы

7.1 Дадаян А.А. Математика: Учебник для СПО.- М.: Инфра-М, 2019.- 544с.
7.2 Дадаян А.А. Сборник задач по математике: Учебное пособие для СПО / А.А. Дадаян.- М.: Форум, 2018.- 352с.
7.3 Конспект теоретических занятий.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВАРИАНТ №1	ВАРИАНТ №2
№1.Даны вершины пирамиды $A=(7;2;4)$, $B=(7;-1;-2)$, $C=(3;3;1)$, $D=(-4;2;1)$. Найти: 1) Угол между ребрами $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$ 2) Длину ребра $\vec{AC}$ 3) Площадь грани ABC 4) Объем пирамиды. №2.Проверить лежат ли точки $A=(3;-1;2)$, $B=(1;2;-1)$, $C=(-1;1;-3)$, $D=(3;-5;3)$ в одной плоскости.	№1. Даны вершины пирамиды $A=(-2;0;-4)$, $B=(-1;7;1)$, $C=(4;-8;-4)$, $D=(1;-4;6)$. Найти: 1) Косинус угла между ребрами $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$ 2) Длину ребра $\vec{AC}$ 3) Площадь грани ABC 4) Объем пирамиды. №2. Показать, что векторы $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ компланарны, если $A=(5;7;-2)$, $B=(3;1;-1)$, $C=(9;4;-4)$, $D=(1;5;0)$.
ВАРИАНТ №3	**ВАРИАНТ №4**
№1.Даны вершины пирамиды $A=(1;3;6)$, $B=(2;2;1)$, $C=(-1;0;1)$, $D=(-4;6;-3)$. Найти: 1) Угол между ребрами $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$ 2) Длину ребра $\vec{AC}$ 3) Площадь грани ABC 4) Объем пирамиды. №2. Доказать, точки $A=(3;5;1)$, $B=(2;4;7)$, $C=(1;5;3)$, $D=(4;4;5)$ лежат в одной плоскости.	№1. Даны вершины пирамиды $A=(1;2;0)$, $B=(3;0;-3)$, $C=(5;2;6)$, $D=(8;4;-9)$. Найти: 1) Косинус угла между ребрами $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$ 2) Длину ребра $\vec{AC}$ 3) Площадь грани ABC 4) Объем пирамиды. №2. Проверить компланарность векторов $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$, если $A=(2;5;3)$, $B=(3;7;4)$, $C=(-5;-5;-1)$, $D=(-4;-3;0)$

Практическое занятие №4

Тема: Решение практических задач при помощи уравнений прямых

1. **Цель работы:** получить практические навыки составления различных видов уравнений прямой линии на плоскости, вычисления угла между двумя прямыми, нахождения расстояния от точки до прямой, нахождения точки пересечения двух прямых.
2. **Время выполнения работы:** 2 академических часа
3. **Краткие теоретические сведения.**

Уравнение прямой, проходящей через две точки, перпендикулярно заданному вектору:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$$

где $(x_0;y_0)$ - координаты заданной точки**,** $(A;B)$ - координаты заданного вектора.

Общее уравнение прямой:

$$Ax+By+C=0,$$

где $(A;B)$ - координаты вектора, перпендикулярного данной прямой.

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку параллельно заданному вектору:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n},$$

где $(x_0;y_0)$ - координаты заданной точки**,** $(m;n)$ - координаты заданного вектора.

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},$$

где $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$ - координаты заданных точек.

Уравнение прямой в отрезках:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

где a,b - отрезки отсекаемые данной прямой на осях OX и OY соответственно.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y=kx+b,$$

где k - угловой коэффициент прямой (тангенс угла наклона прямой к оси OX), b - начальная ордината.

Формула расстояния (d) от точки с координатами $(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Формулы вычисления угла между двумя прямыми:

1. Если прямые заданы общими уравнениями
$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$
то угол между прямыми вычисляют по формуле
$$\cos\alpha = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

2. Если прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом
$$y = k_1x + b_1 \text{ и } y = k_2x + b_2,$$
то угол между прямыми вычисляют по формуле
$$tg\alpha = \frac{|k_2 - k_1|}{1 - k_1 \cdot k_2}$$

Координаты точки пересечения двух прямых:

Чтобы найти координаты точки пересечения двух прямых, заданных уравнениями
$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$
нужно решить систему уравнений
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$
Решение данной системы и будет являться координатами точки пересечения данных прямых.

2. Методика решения типовых задач

2.1 Дан треугольник ABC с координатами вершин $A(4;1)$, $B(0;3)$, $C(-1;-2)$.

Сделать чертёж и найти:

1. Уравнение стороны AB (окончательный результат записать в виде уравнения прямой с угловым коэффициентом).
2. Уравнение медианы BM (результат записать в виде общего уравнения прямой).
3. Уравнение высоты AK (результат записать в виде общего уравнения прямой).
4. Длину высоты AK.
5. Угол между прямыми AK и ВМ.

6. Координаты точки пересечения прямых AK и BM.

Решение.

a. Уравнение стороны AB запишем как уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},$$

где за x_1, y_1 возьмём координаты точки A, за x_2, y_2 - координаты точки B, подставив в уравнение соответствующие числа, получим

$$\frac{x-4}{0-4}=\frac{y-1}{3-1}, \quad \frac{x-4}{-4}=\frac{y-1}{2},$$

перепишем теперь полученное уравнение в виде уравнения с угловым коэффициентом:

$$2(x-4)=-4(y-1)\Rightarrow 4y=-2x+12\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+3.$$

Окончательно получим уравнение стороны AB

$$x+2y-6=0.$$

b. Уравнение медианы BM, также как и в первом случае будем искать в виде уравнения прямой, проходящей через две заданные точки. Для этого найдём координаты точки M как середину отрезка AC:

$$x_M=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{4-1}{2}=\frac{3}{2}, \quad y_M=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{1-2}{2}=-\frac{1}{2}.$$

Подставим в уравнение координаты точек B и M, получим

$$\frac{x-\frac{3}{2}}{0-\frac{3}{2}}=\frac{y+\frac{1}{2}}{3+\frac{1}{2}}\Rightarrow\frac{2x-3}{3}=\frac{2y+1}{7},$$

перепишем полученное уравнение в виде общего уравнения прямой:

$$7(2x-3)=3(2y+1)\Rightarrow 14x-21=6y+3\Rightarrow 14x-6y-24=0$$

окончательно получим:

$$7x-3y-12=0.$$

c. Уравнение высоты AK будем искать в виде уравнения прямой, проходящей через точку A перпендикулярно вектору BC:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0,$$

где $x_0=4, y_0=1$ - координаты точки A, $(A;B)=(-1-0;-2-3)=(-1;-5)$ - координаты вектора BC

Подставим соответствующие координаты в уравнение, получим:

$$-(x-4)-5(y-1)=0\Rightarrow x+5y-9=0.$$

d. Длину высоты AK найдём как расстояние от точки A до прямой BC, по формуле:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

где $x_0=4,\ y_0=1$ - координаты точки A; A, B, C - первый, второй и третий коэффициенты из уравнения прямой BC.

Найдём уравнение прямой BC, как уравнение прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{x-0}{-1-0}=\frac{y-3}{-2-3}\Rightarrow\frac{x}{-1}=\frac{y-3}{-5}\Rightarrow 5x-y+3=0\Rightarrow A=5,\quad B=-1$$

Подставим все известные значения в формулу для нахождения расстояния от точки до прямой:

$$d=\frac{|5\cdot 4-1+3|}{\sqrt{5^2+(-1)^2}}=\frac{22}{\sqrt{26}}=\frac{11\sqrt{26}}{13}.$$

e. Угол между прямыми AK и BM найдём по формуле

$$\cos\alpha=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Подставив соответствующие значения коэффициентов, получим

$$\cos\alpha=\frac{1\cdot 7+5\cdot(-3)}{\sqrt{1+25}\cdot\sqrt{49+9}}=-\frac{8}{\sqrt{1508}}.$$

$$\alpha=\arccos\left(-\frac{8}{\sqrt{1508}}\right)=\pi-\arccos\frac{8}{\sqrt{1508}}$$

f. Для нахождения координат точки пересечения прямых AK и BM решим систему

$$\begin{cases}7x-3y-12=0,\\ x+5y-9=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}7x-3y=12,\\ x+5y=9\end{cases}\Bigg|\bullet(-7)\Rightarrow+\begin{cases}7x-3y=12,\\ -7x-35y=-63\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -38y=-51\Rightarrow y=\frac{51}{38}=1\frac{13}{38}$$

Подставив найденное значение y в любое из уравнений системы, найдём $x=\frac{87}{38}=2\frac{11}{38}$.

Таким образом, точка пересечения прямых AK и BM имеет координаты $\left(2\frac{11}{38};1\frac{13}{38}\right)$.

4. Порядок выполнения практической работы

4.1 Изучить краткие теоретические сведения.
4.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
4.3 Ответить на контрольные вопросы

5. Содержание отчёта

5.1 Тема и цель работы.
5.2 Решение заданий.
5.3 Ответы на контрольные вопросы.

6. Контрольные вопросы

6.1 Запишите уравнение прямой, проходящей через заданную точку, перпендикулярно заданному вектору.
6.2 Запишите уравнение прямой, проходящей через заданную точку, параллельно заданному вектору.
6.3 Запишите уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.
6.4 Запишите общее уравнение прямой.
6.5 Запишите уравнение прямой с угловым коэффициентом.
6.6 Запишите формулу расстояния от точки до прямой.
6.7 Запишите формулы вычисления угла между векторами.
6.8 Как найти точку пересечения двух прямых?

7. Список справочной литературы

7.1 Дадаян А.А. Математика: Учебник для СПО.- М.: Инфра-М, 2019.- 544с.
7.2 Дадаян А.А. Сборник задач по математике: Учебное пособие для СПО / А.А. Дадаян.- М.: Форум, 2018.- 352с.
7.3 Конспект теоретических занятий.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Даны вершины треугольника $A(x;y)$, $B(x;y)$, $C(x;y)$. Сделать чертёж и

найти:

1. Уравнение стороны AB (окончательный результат записать в виде уравнения прямой с угловым коэффициентом).
2. Уравнение медианы BM (результат записать в виде общего уравнения прямой).
3. Уравнение высоты AK (результат записать в виде общего уравнения прямой).
4. Длину высоты AK.
5. Угол между прямыми AK и ВМ.
6. Координаты точки пересечения прямых AK и BM.

ВАРИАНТ 1	**ВАРИАНТ2**
$A(1;1)$, $B(7;4)$, $C(4;5)$	$A(1;1)$, $B(-5;4)$, $C(-2;5)$
ВАРИАНТ 3	**ВАРИАНТ 4**
$A(-1;1)$, $B(5;4)$, $C(2;5)$	$A(-1;1)$, $B(-7;4)$, $C(-4;5)$
ВАРИАНТ 5	**ВАРИАНТ 6**
$A(1;-1)$, $B(7;2)$, $C(4;5)$	$A(1;-1)$, $B(-5;2)$, $C(-2;3)$
ВАРИАНТ 7	**ВАРИАНТ 8**
$A(-1;-1)$, $B(5;2)$, $C(2;3)$	$A(-1;-1)$, $B(-7;2)$, $C(-4;3)$
ВАРИАНТ 9	**ВАРИАНТ 10**
$A(0;1)$, $B(6;4)$, $C(3;5)$	$A(1;0)$, $B(7;3)$, $C(4;4)$

Практическое занятие №5

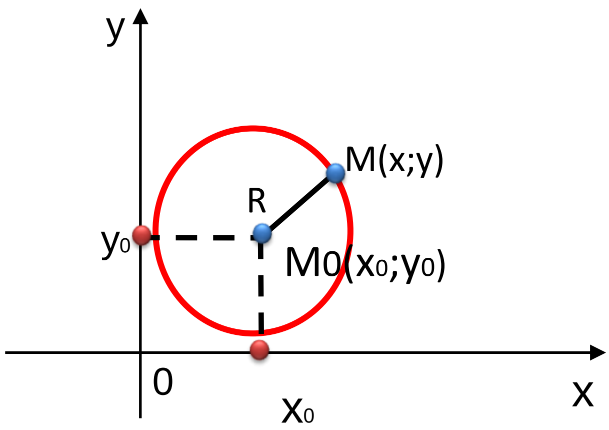
Тема: Решение задач при помощи уравнения окружности, эллипса, гиперболы, параболы

1. Цель работы: получить практические навыки в составлении уравнений линий второго порядка.
2. Время выполнения работы: 2 академических часа
3. Краткие теоретические сведения:

Каноническое уравнение окружности:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,$$

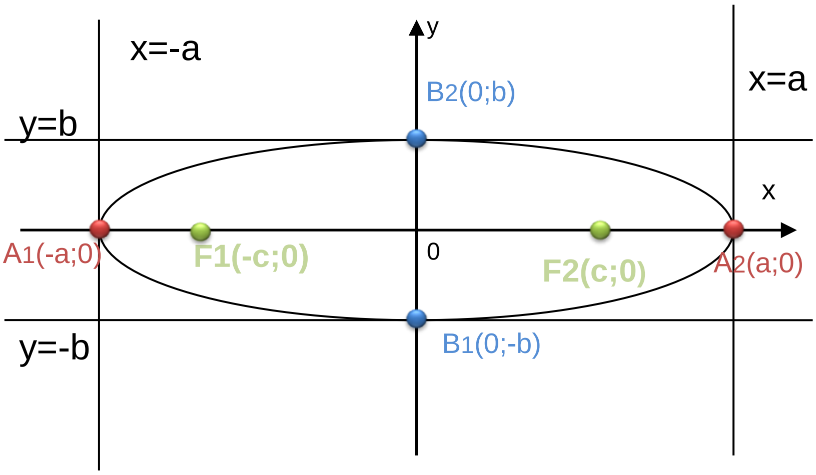
где $(a;b)$ - координаты центра окружности, R - радиус окружности.



Каноническое уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси OX:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a \succ b),$$

где $2a$ - длина большой оси эллипса, $2b$ - длина малой оси эллипса.
$F_1(-c:0)$, $F_2(c;0)$ - фокусы эллипса,
$a^2=b^2+c^2$ - соотношение между a, b и c,
$e=\frac{c}{a}\prec 1$ - эксцентриситет эллипса.



Каноническое уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси OY:

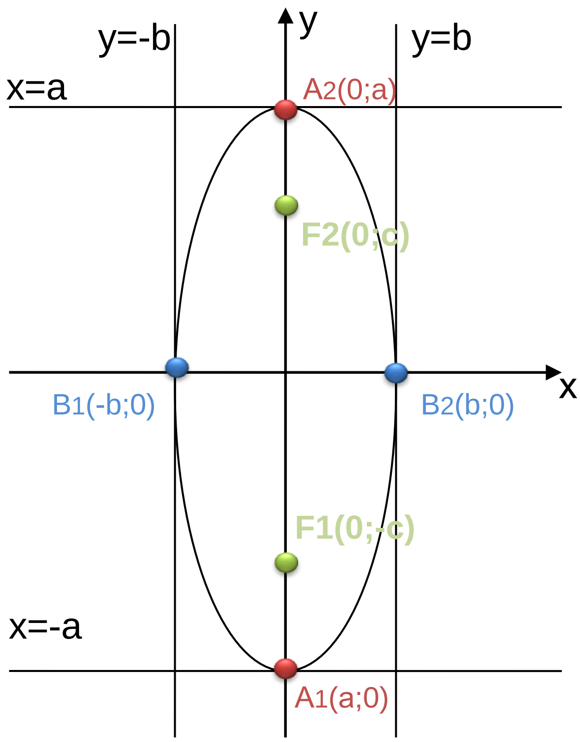
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (a \prec b)$$

где $2a$ - длина малой оси эллипса, $2b$ - длина большой оси эллипса,

$F_1(0;-c)$, $F_2(0;c;)$ - фокусы эллипса,

$b^2=a^2+c^2$ - соотношение между параметрами a, b и c,

$e=\dfrac{b}{c}\prec 1$ - эксцентриситет эллипса.



Каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси OX:

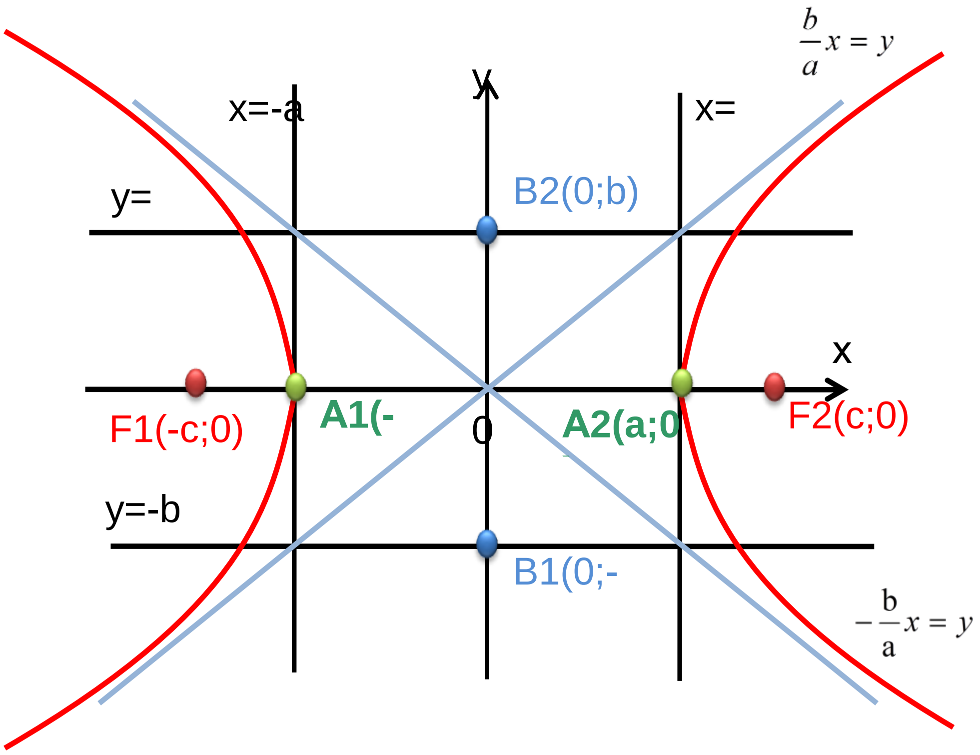
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a \succ b),$$

где $2a$ - длина действительной оси гипербола, $2b$ - длина мнимой оси гиперболы.

$F_1(-c:0)$, $F_2(c;0)$ - фокусы гиперболы,

$a^2=c^2-b^2$ - соотношение между a, b и c,

$e=\frac{a}{c}\succ 1$ - эксцентриситет гиперболы.



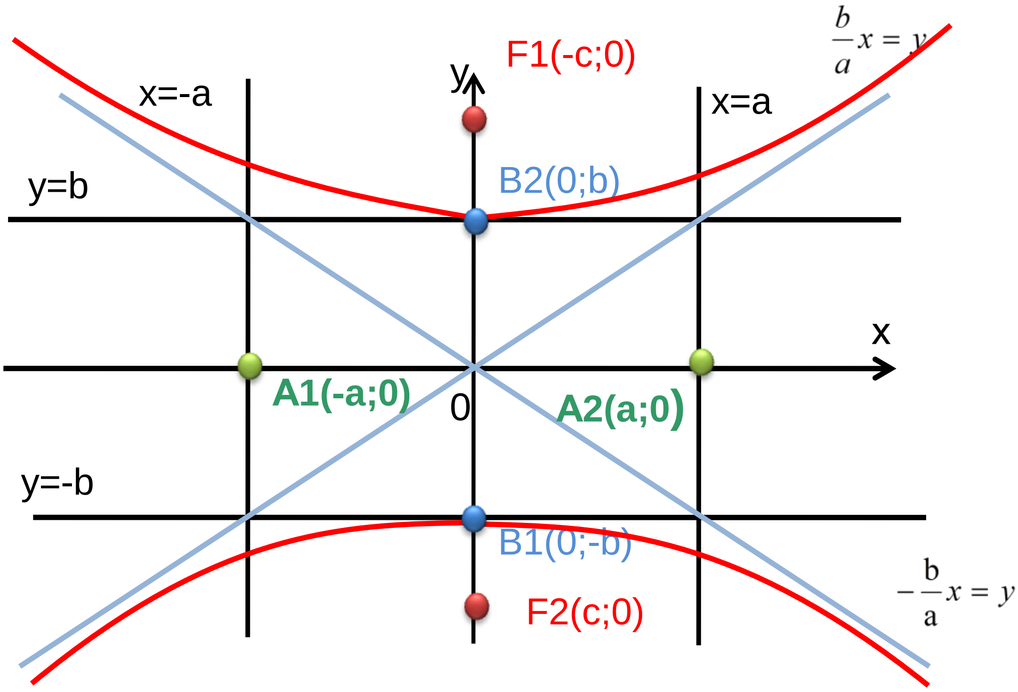
Каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси OY:

$$\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=1 \qquad (b \prec a)$$

где $2b$ - длина действительной оси гипербола, $2a$ - длина мнимой оси гиперболы.

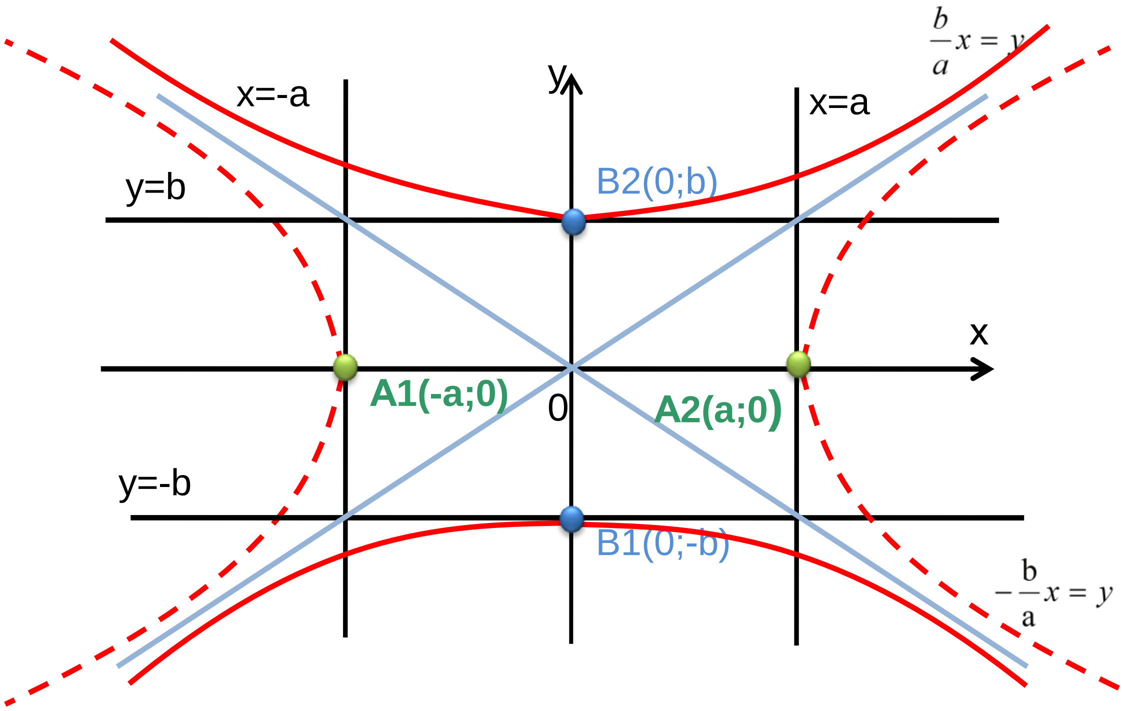
$b^2=c^2-a^2$ - соотношение между a, b и c,

$e=\frac{b}{c}\succ 1$ - эксцентриситет гиперболы.



Каноническое уравнение сопряжённой гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

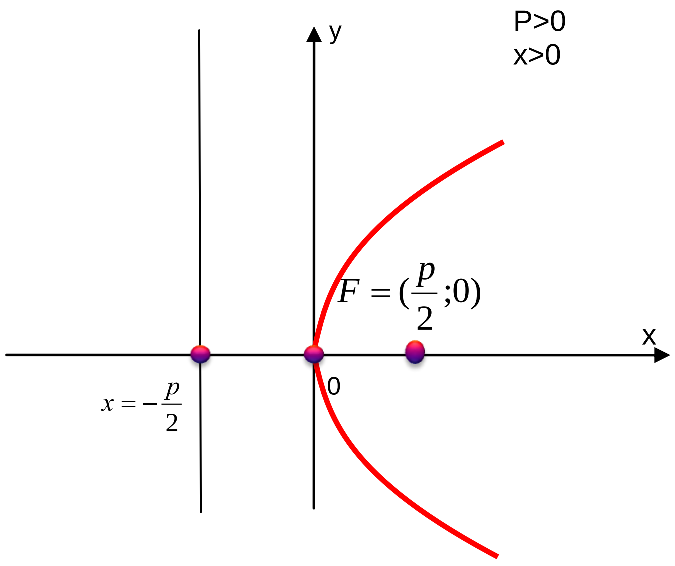


Уравнение асимптот гиперболы:

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

Каноническое уравнение параболы, у которой фокус которой лежит на оси ОХ, ветви направлены вправо: $x = py^2$**,**

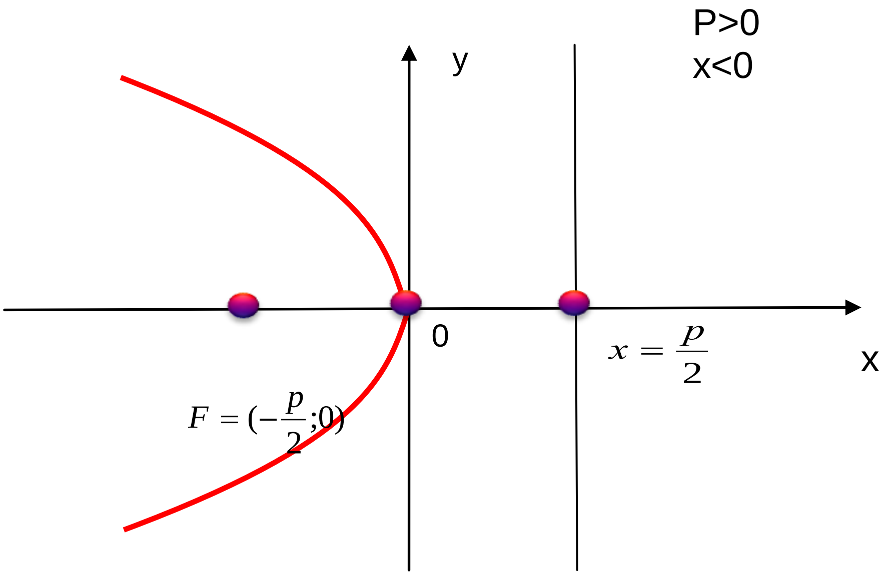
где p - параметр параболы, $F(\frac{p}{2};0)$ - фокус параболы, $x = -\frac{p}{2}$ - уравнение директрисы параболы.



Каноническое уравнение параболы, у которой фокус которой лежит на оси ОХ, ветви направлены влево:

$$x = -py^2,$$

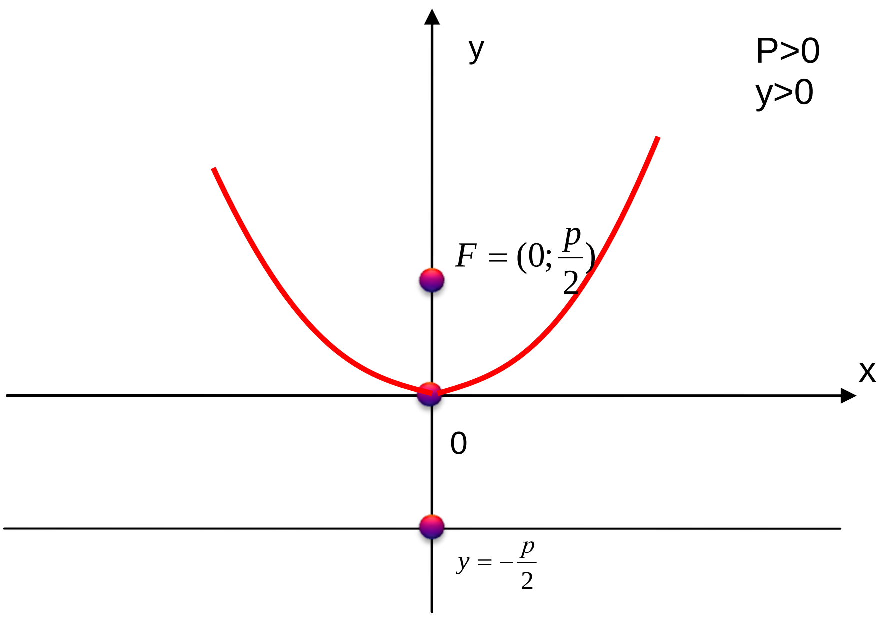
где p - параметр параболы, $F(-\frac{p}{2};0)$ - фокус параболы, $x = \frac{p}{2}$ - уравнение директрисы параболы.



Каноническое уравнение параболы, у которой фокус которой лежит на оси OY, ветви направлены вверх:

$$y = px^2,$$

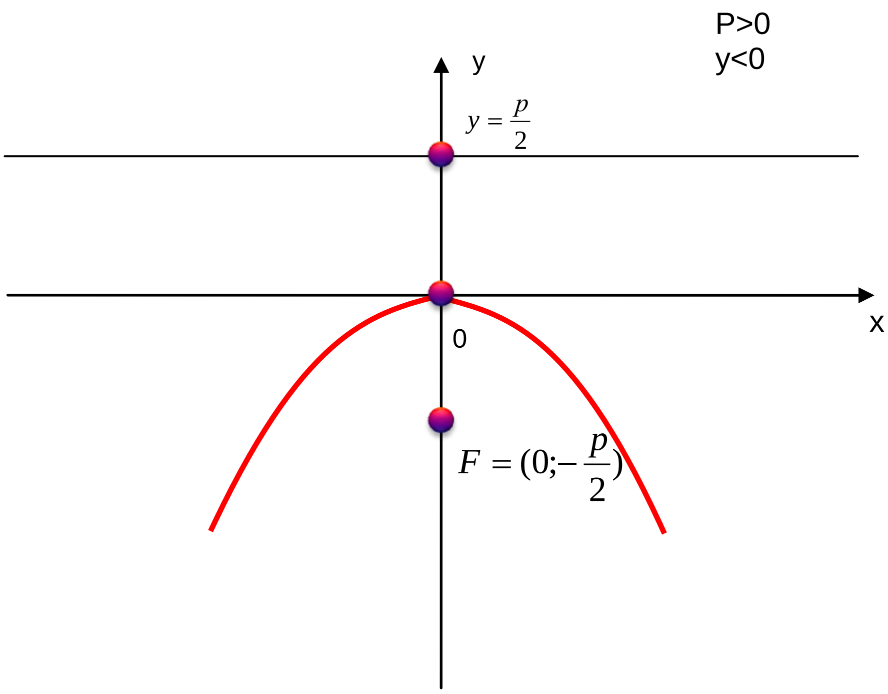
где p - параметр параболы, $F(0;\frac{p}{2})$ - фокус параболы, $y = -\frac{p}{2}$ - уравнение директрисы параболы.



Каноническое уравнение параболы, у которой фокус которой лежит на оси OY, ветви направлены вниз:

$$y = -px^2,$$

где p - параметр параболы, $F(0;-\frac{p}{2})$ - фокус параболы, $y = \frac{p}{2}$ - уравнение директрисы параболы.



2. Методика решения типовых задач

2.1 По уравнению окружности $x^2 - 2x + y^2 + 4y - 4 = 0$ найти координаты центра и радиус окружности. Выполнить чертеж.

Решение:

$\underline{x^2 - 2x} + \underline{y^2 + 4y} - 4 = 0$

Дополним суммы $\underline{x^2 - 2x}$ и $\underline{y^2 + 4y}$ до квадратов суммы и разности. Для этого прибавим к первой сумме 1, ко второй 4, затем их вычтем, получим квадрат разности и квадрат суммы:

$\underline{x^2 - 2x + 1} + \underline{y^2 + 4y + 4} - 4 - 1 - 4 = 0$. Свернем подчеркнутые алгебраические суммы в квадрат разности и квадрат суммы, соответственно, получим:

$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$. Значит, центр окружности в точке (1;-2) ; R=3.

2.2 Составить уравнение эллипса, фокусы которого находятся в точках $(-4;0)$ и $(4;0)$, а эксцентриситет $e = 0{,}8$.

Решение. Фокусы эллипса лежат на оси OX, поэтому $a \succ b$. Запишем каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

и найдём a и b из системы уравнений

$$\begin{cases} c^2=a^2-b^2, \\ \dfrac{c}{a}=0{,}8 \end{cases}$$

По условию $c=4$, тогда имеем

$$\begin{cases} 4^2=a^2-b^2, \\ \dfrac{4}{a}=0{,}8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2-b^2=16, \\ a=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=3, \\ a=5 \end{cases},$$

таким образом, искомое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

2.3. Составить уравнение гиперболы, если её асимптоты заданы уравнениями $y=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ и она проходит через точку $(6;-4)$.

Решение. Подставим в каноническое уравнение гиперболы координаты заданной точки, и воспользовавшись из уравнения асимптот гиперболы соотношением $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$, получим систему для определения a и b:

$$\begin{cases} \dfrac{6^2}{a^2}-\dfrac{(-4)^2}{b^2}=1, \\ \dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 36b^2-16a^2=a^2b^2, \\ b=\dfrac{a\sqrt{6}}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=12, \\ b^2=8 \end{cases},$$

тогда искомое уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{8}=1.$$

2.4 Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси OY и проходящей через точку $A(4;2)$.

Решение. Т.к. парабола симметрична оси OY и проходит через точку, лежащую в I координатной четверти, то её уравнение имеет вид

$$y=px^2.$$

Для нахождения параметра p подставим в уравнение параболы координаты данной точки, получим

$$2=16p \Rightarrow p=\frac{1}{8},$$

следовательно, искомое уравнение параболы имеет вид: $y = \frac{x^2}{16}$.

4. Порядок выполнения практической работы

4.1 Изучить краткие теоретические сведения.
4.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
4.3 Ответить на контрольные вопросы

5. Содержание отчёта

5.1 Тема и цель работы.
5.2 Решение заданий.
5.3 Ответы на контрольные вопросы.

6. Контрольные вопросы

6.1 Дайте определение окружности.
6.2 Запишите каноническое уравнение окружности.
6.3 Дайте определение эллипса.
6.4 Запишите каноническое уравнение эллипса
6.5 Чему равен эксцентриситет эллипса.
6.6 Запишите соотношение между параметрами a, b и c для эллипса.
6.7 Дайте определение гиперболы.
6.8 Запишите каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой находятся на оси OX; на оси OY.
6.9 Чему равен эксцентриситет гиперболы?
6.10 Запишите уравнения асимптот гиперболы.
6.11 Какая гипербола называется равносторонней? Запишите каноническое уравнение равносторонней гиперболы и уравнения её асимптот.
6.12 Какие гиперболы называются сопряжёнными, запишите уравнения сопряжённых гипербол.
6.13 Дайте определение параболы.
6.14 Запишите все виды канонических уравнений парабол, вершины которых лежат в начале координат и которые симметричны относительно осей координат. Сделайте соответствующие чертежи.

7. Список справочной литературы

7.1 Дадаян А.А. Математика: Учебник для СПО.- М.: Инфра-М, 2019.- 544с.
7.2 Дадаян А.А. Сборник задач по математике: Учебное пособие для СПО / А.А. Дадаян.- М.: Форум, 2018.- 352с.
7.3 Конспект теоретических занятий.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вариант №1	Вариант №2
№1. Определить координаты центра M_0 и радиус окружности: $x^2+y^2+4x+4y+3=0$ №2. Составить уравнение эллипса и найти координаты его фокусов, если длина большой полуоси эллипса равна 10, $e=0{,}6$, а фокусы эллипса лежат на оси OX. №3. Гипербола задана уравнением $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$. Найти координаты фокусов гиперболы, длины действительной и мнимой осей, эксцентриситет и уравнение асимптот гиперболы. №4. Составить уравнение параболы и найти координаты её фокуса, если директриса параболы $x=-3$. Сделать чертёж.	№1. Определить координаты центра M_0 и радиус окружности: $x^2+y^2+2x-2y+1=0$. №2. Составить уравнение эллипса и найти координаты его вершин, если расстояние между фокусами эллипса равно 8, $e=0{,}8$, а фокусы эллипса лежат на оси OX. №3. Гипербола задана уравнением $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$. Найти координаты фокусов гиперболы, длины действительной и мнимой осей, эксцентриситет и уравнения асимптот гиперболы. №4. Составить уравнение параболы и найти координаты её фокуса, если директриса параболы $y=5$. Сделать чертёж
Вариант №3	**Вариант №4**
№1. Определить координаты центра M_0 и радиус окружности: $x^2+y^2-4x+2y-15=0$ №2. Составить уравнение эллипса и найти координаты его фокусов, если длина малой оси эллипса равна 12, $e=0{,}4$, а фокусы эллипса лежат на оси OX. №3. Гипербола задана уравнением $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{16}=1$. Найти координаты	№1. Определить координаты центра M_0 и радиус окружности: $x^2+y^2-4x+16y-5=0$. №2. Составить уравнение эллипса и найти длины его осей, если расстояние между фокусами эллипса равно 14, $e=0{,}2$, а фокусы эллипса лежат на оси OX. №3 Гипербола задана уравнением $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1$. Найти координаты

фокусов гиперболы, длины действительной и мнимой осей, эксцентриситет и уравнение асимптот гиперболы. №4. Составить уравнение параболы и найти координаты её фокуса, если директриса параболы $y=-2$. Сделать чертёж.	фокусов гиперболы, длины действительной и мнимой осей, эксцентриситет и уравнения асимптот гиперболы. №4. Составить уравнение параболы и найти координаты её фокуса, если директриса параболы $x=6$. Сделать чертёж
Вариант №5	**Вариант №6**
№1. Определить координаты центра M_0 и радиус окружности: $x^2+y^2-12x+11=0$. №2. Написать уравнение эллипса, если $2c=8, \quad e=0{,}8$. №3. Написать уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси OX, если $c=7, \quad e=\frac{7\sqrt{6}}{12}$. №4. Написать уравнение параболы, имеющей вершину в начале координат, симметричной относительно оси OX и проходящей через точку $A(-3;1)$	№1. Определить координаты центра M_0 и радиус окружности: $x^2+y^2-6x+8y=0$ №2. Написать уравнение эллипса, у которого фокусы имеют координаты $\left(2\sqrt{5};0\right)$ и $\left(-2\sqrt{5};0\right)$, а сумма полуосей равна 10. №3. Написать уравнение гиперболы, асимптотами которой служат прямые $y=\pm\frac{3}{5}x$ и фокусы которой имеют координаты $(\pm 2;0)$. №4. Написать уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси OY и проходящей через точку $A(-2;-4)$

Практическое занятие №6

Тема: Решение задач с комплексными числами в алгебраической форме, в тригонометрической и показательной форме. Решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом

1. **Цель работы:** получить практические навыки выполнения действий с комплексными числами в различных формах записи, нахождения модуля и аргумента комплексного числа, решения квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом.
2. **Время выполнения работы:** 2 академических часа.
3. **Краткие теоретические сведения**

Комплексным числом z называется выражение вида

$$z = x + iy,$$

где x, y - действительные числа, i - мнимая единица

$$i^2 = -1.$$

x - ***действительная часть*** комплексного числа $(\operatorname{Re} z)$,
y - **мнимая часть** комплексного числа. $(\operatorname{Im} z)$

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются **равными,** если равны их действительные и мнимые части:

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2$$

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются **сопряженными.**

Запись комплексного числа

$$z = x + iy,$$

называется **алгебраической формой записи** комплексного числа **z.**

Действия с комплексными числами в алгебраической форме записи.

1. Сложение

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством:

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

2. Вычитание

Разностью двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число:

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

3. Умножение

Произведением комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число:

$$z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

На практике, чтобы выполнить умножение комплексных чисел

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$

нужно раскрыть скобки, заменить $i^2 = -1$, а затем привести подобные слагаемые.

4. Деление

Частное двух комплексных чисел z_1 и $z_2 \neq 0$ находят по следующему **правилу**:

числитель и знаменатель дроби $\dfrac{z_1}{z_2}$ умножают на число $\overline{Z}_2$, сопряженное знаменателю, раскрывают скобки, заменяют $i^2 = -1$, приводят подобные слагаемые и почленно делят числитель на знаменатель.

Возведение в степень комплексного числа и извлечение корня n-ой степени из комплексного числа в алгебраической форме не выполняют.

Геометрическое изображение комплексного числа.

Комплексное число $z = x + iy$, изображают на координатной плоскости в виде радиус-вектора, конец которого имеет координаты $(x; y)$

Длина радиус-вектора называется **модулем комплексного числа,** обозначается r и вычисляется по формуле:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Угол, который радиус-вектор, изображающий комплексное число, образует с положительным направлением оси OX, называется **аргументом комплексного числа** и обозначается φ.

Аргумент комплексного числа удобно определять с помощью следующей таблицы:

Четверть, в которой находится радиус-вектор, изображающий комплексное число	Формула для определения аргумента
I	$\varphi = \varphi_0$
II, III	$\varphi = \varphi_0 + \pi$
IV	$\varphi = \varphi_0 + 2\pi$

где φ_0 определяют по формуле:

$$\varphi_0 = arctg\,\frac{y}{x}.$$

Тригонометрическая форма записи комплексного числа:

$$z = r(\sin\varphi + i\sin\varphi)$$

Показательная форма записи комплексного числа:

$$z = r \cdot e^{i\varphi}$$

Действия с комплексными числами в тригонометрической и показательной формах записи:

Действие	**Тригонометрическая форма записи** $z_1 = r_1(\sin\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ $z_2 = r_2(\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$	**Показательная форма записи** $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$ $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$
Умножение	$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$	$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
Деление		

	$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)$	$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$
Возведение в целую степень	$z^n=r^n\left(\cos n\varphi+i\sin n\varphi\right)$	$z^n=r^n e^{in\varphi}$
Извлечение корня n-ой степени	$z_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$, $k=0\div(n-1)$	$z_k=\sqrt[n]{r}e^{i\cdot\frac{\varphi+2\pi k}{n}}$, $k=0\div(n-1)$

2. Методика решения типовых задач

2.1 Пример 1. Выполнить действия в алгебраической форме

$$\frac{(7-5i)(6+7i)}{(1-3i)+(3-i)}.$$

Решение. В числителе дроби раскроем скобки, а в знаменателе выполним сложение комплексных чисел, сложив соответственно действительные и мнимые части:

$$\frac{(7-5i)(6+7i)}{(1-3i)+(3-i)}=\frac{42+49i-30i-35i^2}{4-4i}=\frac{42+35+19i}{4-4i}=\frac{77+19i}{4-4i}.$$

Умножим теперь числитель и знаменатель дроби на выражение $4+4i$, сопряжённое знаменателю:

$$\frac{(77+19i)\cdot(4+4i)}{(4-4i)\cdot(4+4i)}=\frac{308+308i+76i+76i^2}{16-16i^2}=\frac{234+384i}{32}=\frac{117}{16}+12i.$$

2.2 Пример 2. Даны числа $z_1=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad z_2=-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}i$. Выполнить в тригонометрической форме записи $z_1\cdot z_2$, $\sqrt[3]{z_1}$, в показательной форме $\frac{z_1}{z_2}$, ${z_2}^4$.

Решение. Найдём модули и аргументы чисел z_1 и z_2:

$$r_1=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1.$$

$$r_2=\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Радиус-вектор, изображающий число z_1 находится в IV четверти, поэтому аргумент числа z_1 находим по формуле

$$\varphi_1=\varphi_0+2\pi=arctg\,\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}+2\pi=-arctg\sqrt{3}+2\pi=-\frac{\pi}{3}+2\pi=\frac{5\pi}{3}$$

Радиус-вектор, изображающий число z_2 находится в III четверти, поэтому аргумент числа z_2 находим по формуле

$$\varphi_2=\varphi_0+2\pi=arctg\,\frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}}+\pi=arctg1+\pi=\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{5\pi}{4}$$

Запишем числа z_1 и z_2 в тригонометрической и показательной формах:

$$z_1=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3},\ z_2=\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$z_1=e^{\frac{5\pi}{3}i},\quad z_2=\frac{\sqrt{2}}{3}e^{\frac{5\pi}{4}i}.$$

Найдём $z_1\cdot z_2$ (см. таблицу):

$$z_1z_2=\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}+\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}+\frac{5\pi}{4}\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{35\pi}{12}+i\sin\frac{35i}{12}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$$

Найдём $\sqrt[3]{z_1}$ (см. таблицу):

$$k=0,\qquad z_{1,0}=\cos\frac{5\pi}{9}+i\sin\frac{5\pi}{9}$$

$$k=1,\qquad z_{1,1}=\cos\frac{\frac{5\pi}{3}+2\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{3}+2\pi}{3}=\cos\frac{11\pi}{9}+i\sin\frac{11\pi}{9}$$

$$k=2,\qquad z_{1,2}=\cos\frac{\frac{5\pi}{3}+4\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{3}+4\pi}{3}=\cos\frac{17\pi}{9}+i\sin\frac{17\pi}{9}$$

Найдём $\frac{z_1}{z_2}$ (см. таблицу):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{3}} e^{i\left(\frac{5\pi}{3} - \frac{5\pi}{4}\right)} = \frac{3\sqrt{2}}{2} e^{\frac{5\pi}{12} i}$$

Найдём z_2^4 (см. таблицу):

$$z_2^4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^4 e^{4 \cdot \frac{5\pi}{4} i} = \frac{4}{81} e^{5\pi \cdot i} = \frac{4}{81} e^{\pi i}$$

2.3 Пример 3. Решить уравнение с отрицательным дискриминантом $x^2 + 4x + 13 = 0.$

Решение. Вычислим дискриминант квадратного уравнения:

$$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 13 = -36.$$

Представим

$$-36 = -1 \cdot 36 = 36 \cdot i^2$$

Воспользуемся формулой корней квадратного уравнения, получим

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{36 i^2}}{2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i.$$

Таким образом, корнями квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом являются два комплексно сопряжённых числа. В данном случае

$$z_1 = -2 + 3i, \quad z_2 = -2 - 3i$$

4. Порядок выполнения практической работы

4.1 Изучить краткие теоретические сведения.
4.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
4.3 Ответить на контрольные вопросы

5. Содержание отчёта

5.1 Тема и цель работы.
5.2 Решение заданий.
5.3 Ответы на контрольные вопросы.

6.Контрольные вопросы

6.1 Дайте определение комплексного числа.

6.2 Что называется мнимой единицей?
6.3 Как записывают комплексное число в алгебраической форме?
6.4 Как выполняют сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел в алгебраической форме записи?
6.5 Как геометрически изображают комплексное число?
6.6 Что называется модулем и аргументом комплексного числа? Запишите формулу вычисления модуля и аргумента.
6.7 Как записывают комплексное число в тригонометрической форме, в показательной форме?
6.8 Как выполняют умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня целой степени в тригонометрической и показательной формах записи (запишите формулы)?

7.Список справочной литературы

7.1 Дадаян А.А. Математика: Учебник для СПО.- М.: Инфра-М, 2019.- 544с.
7.2 Дадаян А.А. Сборник задач по математике: Учебное пособие для СПО / А.А. Дадаян.- М.: Форум, 2018.- 352с.
7.3 Конспект теоретических занятий.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВАРИАНТ №1	ВАРИАНТ №2
№1. Выполнить действия в алгебраической форме: $$\frac{(2+i)\cdot(3-i)}{(2+3i)-(3+2i)}$$	№1. Выполнить действия в алгебраической форме: $$\frac{(4+i)\cdot(5+3i)}{(3+i)+(2+i)}$$
№2. Даны числа $z_1=-\frac{1}{7}+\frac{\sqrt{3}}{7}i$ и $z_2=-\frac{3}{5}+\frac{\sqrt{3}}{5}\cdot i$.	№2. Даны числа $z_1=-\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{3}}{8}i$ и $z_2=-1-\sqrt{3}\cdot i$.
a) Записать числа z_1 и z_2 в тригонометрической и показательной формах, геометрически изобразить эти числа.	a) Записать числа z_1 и z_2 в тригонометрической и показательной формах, .геометрически изобразить эти числа.
b) Найти $z_1\cdot z_2$ и $\frac{z_1}{z_2}$ в тригонометрической форме.	b) Выполнить действия в тригонометрической форме $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1^{\ 3}$.
c) Найти $\sqrt[3]{z_1}$ в показательной форме.	c) Выполнить действия в показательной форме $z_1\cdot z_2$, $\sqrt[3]{z_2}$.
№3. Решить уравнение: $x^2-2x+5=0$	№3. Решить уравнение: $x^2-8x+25=0$

<table>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><th>ВАРИАНТ №3</th><th>ВАРИАНТ №4</th></tr>
<tr><td>

№1. Выполнить действия в алгебраической форме:

$$\frac{(3-i)\cdot(1-4i)}{(2-i)+(-2+2i)}$$

№2. Даны числа $z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$ и $z_2=-4-4\sqrt{3}\cdot i$.

a) Записать числа z_1 и z_2 в тригонометрической и показательной формах, геометрически изобразить эти числа.

b) Выполнить действия в тригонометрической форме $z_1\cdot z_2$, $\sqrt[3]{z_1}$.

c) Выполнить действия в показательной форме $\frac{z_2}{z_1}$, $z_2^{\,3}$.

№3. Решить уравнение: $x^2+6x+18=0$

</td><td>

№1. Выполнить действия в алгебраической форме:

$$\frac{(5-7i)\cdot(7+6i)}{(4-5i)-(3-4i)}$$

№2. Даны числа $z_1=-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}i$ и $z_2=-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot i$.

a) Записать числа z_1 и z_2 в тригонометрической и показательной формах, геометрически изобразить эти числа.

b) Выполнить действия в тригонометрической форме $z_2^{\,5}$, $\sqrt[4]{z_1}$

c) Выполнить действия в показательной форме $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1\cdot z_2$.

№3. Решить уравнение: $x^2+8x+17=0$

</td></tr>
</table>

Практическое занятие №7

Тема: Вычисление пределов функции типа: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$; $(\infty-\infty)$.

1. **Цель работы:** получить практические навыки вычисления пределов функций различных типов.
2. **Время выполнения работы:** 2 академических часа.
3. **Краткие теоретические сведения:**

1. Число A называется ***пределом функции*** $y=y(x)$ при x, стремящемся к a, если для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ, зависящее от ε, что при всех $x\in(b;c)$, удовлетворяющих неравенству

$$|x-a|\prec\delta$$

выполняется неравенство

$$|y(x)-A|\prec\varepsilon .$$

2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют пределы при x, стремящемся к a, т.е.

$$\lim_{x\to a} f(x)=A,\quad \lim_{x\to a} g(x)=B,$$

тогда справедливы следующие теоремы:

1. *Предел* ***суммы (разности)*** *двух (или более) функций равен* ***сумме (разности)*** *пределов каждой из этих функций.*

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)=A+B$$

2. *Предел* ***произведения*** *двух (или более) функций равен* ***произведению*** *пределов каждой из этих функций.*

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)=A\cdot B$$

Следствие.

Постоянный множитель можно выносить за знак предела.

$$\lim_{x\to a} C\cdot f(x)=C\cdot\lim_{x\to a} f(x)$$

3. *Предел* ***частного*** *двух функций равен* ***частному*** *пределов каждой из этих функций.*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{A}{B}\ .$$

(в этом случае предполагается, что функция $g(x)\neq 0$ в достаточно малой окрестности точки a и $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$).

4. *Если существует* $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$ *и* $y(\varphi(x))$ *- элементарная функция, то*

$$\lim_{x\to a} y(\varphi(x)) = y\left(\lim_{x\to a}\varphi(x)\right).$$

<u>Замечание</u>. Число, к которому в пределе функции стремится переменная x, называется *предельным значением* переменной; выражение, стоящее под знаком $\lim$, называется *предельным выражением.* Предел функции считается вычисленным, если при подстановке в предельное выражение предельного значения переменной получают конечное число или бесконечность.

2. Методика решения типовых задач

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 4}\left(5x^3+2x^2-3x+7\right)$.

Решение. Предельное выражение является многочленом, для вычисления предела воспользуемся соответствующими теоремами:

$$\lim_{x\to 2}\left(5x^3+2x^2-3x+7\right)=\lim_{x\to 2}\left(5x^3\right)+\lim_{x\to 2}\left(2x^2\right)-\lim_{x\to 2}(3x)+\lim_{x\to 2}7=$$

$$=5\left(\lim_{x\to 2}x\right)^3+2\left(\lim_{x\to 2}x\right)^2-3\lim_{x\to 2}x+7=5\cdot 2^3+2\cdot 2^2-3\cdot 2+7=49$$

Таким образом, для вычисления предела многочлена $f(x)$ при $x\to a$ достаточно вместо переменной x подставить значение a, к которому она стремится, и выполнить соответствующие действия, т.е.

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$

В большинстве случаев при вычислении пределов функций подстановка предельного значения переменной в предельное выражение приводит к так называемым ***неопределённостям***, т.е. не даёт в результате конечного числа или ∞. Тогда предел функции вычисляют с помощью различных специальных приёмов в зависимости от типа неопределённости.

Типы неопределённостей:

$$\frac{\infty}{\infty},\quad \frac{0}{0},\quad 1^\infty,\quad \infty-\infty,\quad 0^\infty,\quad 0\cdot\infty$$

2.1 Пример 2. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+2x+7}{x^2+3x+5}$.

Решение. В данном случае имеет место неопределённость типа $\dfrac{\infty}{\infty}$, для раскрытия неопределённости данного типа применяют следующий приём: выносят в числителе и знаменателе дроби за скобки старшую степень переменной:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+2x+7}{x^2+3x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(5+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}{1+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}=$$

$$\frac{5+\frac{2}{\infty}+\frac{7}{\infty}}{1+\frac{3}{\infty}-\frac{5}{\infty}}=\frac{5+0+0}{1+0+0}=5.$$

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}$.

Решение. В данном случае имеет место неопределенность $\frac{0}{0}$. В числителе и знаменателе дроби стоят многочлены, тогда раскладывают их на множители.

Вынесем за скобки в числителе и в знаменателе дроби общий множитель x:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(x^2-x+2\right)}{x(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x+2}{x+1}=\frac{0-0+2}{0+1}=2.$$

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$.

Решение. Разложим числитель и знаменатель дроби на множители по формуле

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2):$$

$$x^2-4x-5=(x-5)(x+1);\quad x^2-2x-3=(x+1)(x-3).$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-5)(x+1)}{(x+1)(x-3)}=\lim_{x\to -1}\frac{x-5}{x-3}=\frac{-1-5}{-1-3}=\frac{6}{4}=1\frac{1}{2}.$$

2.2 Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{3-x}$.

Решение. В данном примере имеем неопределённость типа $\frac{0}{0}$ в случае, когда в предельном выражении присутствует иррациональность. В таком случае умножают числитель и знаменатель дроби на выражение $\sqrt{2x+3}+3$, сопряжённое числителю:

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{3-x}=\lim_{x\to3}\frac{\left(\sqrt{2x+3}-3\right)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}{(3-x)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}=$$

$$\lim_{x\to3}\frac{\left(\sqrt{2x+3}\right)^2-3^2}{(3-x)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}=\lim_{x\to3}\frac{2x+3-9}{(3-x)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{2x-6}{(3-x)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}=\lim_{x\to3}\frac{2(x-3)}{(3-x)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}=$$

$$-2\lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}=-2\lim_{x\to3}\frac{1}{\sqrt{2x+3}+3}=$$

$$=-2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\cdot(-1)+3}+3}=-2\cdot\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}.$$

2.3 Пример 9. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-3}\right)$.

Решение. В данном примере имеем неопределённость типа $\infty-\infty$, в предельном выражении присутствует иррациональность, в таком случае предельное выражение умножают и делят на ему сопряжённое:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-3}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-3}\right)\left(x+\sqrt{x^2-3}\right)}{x+\sqrt{x^2-3}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-\left(\sqrt{x^2-3}\right)^2}{x+\sqrt{x^2-3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+3}{x+\sqrt{x^2-3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x+\sqrt{x^2-3}}=$$

$$=\frac{3}{\infty+\infty}=0.$$

2.4 Пример 10. Вычислить $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$.

Решение. Здесь также имеет место неопределённость $\infty-\infty$. Выполним в предельном выражении вычитание дробей, приведя их для этого к общему знаменателю:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)(x+1)}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x+1-2}{(x-1)(x+1)}=$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

4. Порядок выполнения практической работы

4.1 Изучить краткие теоретические сведения.
4.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
4.3 Ответить на контрольные вопросы

5. Содержание отчёта

5.1Тема и цель работы.
5.2 Решение заданий.
5.3Ответы на контрольные вопросы.

5. Контрольные вопросы

6.1 Дайте определение предела функции.
6.2 Сформулируйте основные теоремы о пределах.
6.3 Как раскрывают неопределённость типа $\frac{\infty}{\infty}$
6.4 Как раскрывают неопределённость типа $\frac{0}{0}$ в случае, когда в числителе и знаменателе присутствуют многочлены?
6.5 Как раскрывают неопределённость типа $\frac{0}{0}$ в случае, когда в числителе и знаменателе присутствует иррациональность?
6.6 Как раскрывают неопределённость типа $\infty - \infty$?

7. Список справочной литературы

6.1 Алексеева Е.В. «Функции. Пределы. Непрерывность»: учебное пособие для студентов 1-го , 2-го курса технических специальностей по разделу дисциплин «Элементы высшей математики», «Математика»
6.2 Конспект теоретических занятий

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вычислить пределы следующих функций:

ВАРИАНТ 1	ВАРИАНТ 2
1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$	**1.** $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+4x-5}{x+5}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{4-x}}{x}$	**2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}{5x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+9}-3}$	**3.** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+16x}-\sqrt{x^2-x}\right)$	**4.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-3x^2+2}{7x^5+3x^3+2x-1}$	**5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4+3x^2+2x-1}{5x^4-2x^3+x+5}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2-2x-3}\right)$	**6.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)$
7. $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{1}{27+x^3}-\dfrac{1}{3+x}\right)$	**7** $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2x}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^5-3x^3+x^2}{x^4+2x^2}$	**8.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$

ВАРИАНТ 3	ВАРИАНТ 4
1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-6x+9}$	**1.** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+27}{x+3}$
2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$	**2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{4x}$
3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$	**3.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{1-\sqrt{3-x}}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+16x-3}\right)$	**4.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+1}{2x^3+4x-1}$	**5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+10x-3}{5x^2+11x-2}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right)$	**6.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$
7. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x}\right)$	**7.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$
8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-1}$	**8.** $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\dfrac{3x^2+5x-2}{3x-1}$

Практическое занятие №8

Тема: Вычисление первого и второго замечательных пределов

1. **Цель работы:** получить практические навыки вычисления первого и второго замечательных пределов.
2. **Время выполнения работы:** 2 академических часа
3. **Краткие теоретические сведения**

1. Число A называется ***пределом функции*** $y = y(x)$ при x, стремящемся к a, если для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ, зависящее от ε, что при всех $x \in (b;c)$, удовлетворяющих неравенству

$$|x-a| \prec \delta$$

выполняется неравенство

$$|y(x)-A| \prec \varepsilon .$$

2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют пределы при x, стремящемся к a, т.е.

$$\lim_{x\to a} f(x) = A, \quad \lim_{x\to a} g(x) = B,$$

тогда справедливы следующие теоремы:

1. *Предел* ***суммы (разности)*** *двух (или более****)*** *функций равен* ***сумме (разности)*** *пределов каждой из этих функций****.***

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = A+B$$

2. *Предел* ***произведения*** *двух (или более) функций равен* ***произведению*** *пределов каждой из этих функций.*

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x) = A\cdot B$$

Следствие.

Постоянный множитель можно выносить за знак предела.

$$\lim_{x\to a} C\cdot f(x) = C\cdot \lim_{x\to a} f(x)$$

3. *Предел* ***частного*** *двух функций равен* ***частному*** *пределов каждой из этих функций.*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{A}{B} .$$

(в этом случае предполагается, что функция $g(x) \neq 0$ в достаточно малой окрестности точки a и $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$).

4. *Если существует* $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$ *и* $y(\varphi(x))$ - *элементарная функция, то*

$$\lim_{x\to a} y(\varphi(x)) = y\left(\lim_{x\to a}\varphi(x)\right).$$

Замечание. Число, к которому в пределе функции стремится переменная x, называется *предельным значением* переменной; выражение, стоящее под знаком $\lim$, называется *предельным выражением*.

Предел функции считается вычисленным, если при подстановке в предельное выражение предельного значения переменной получают конечное число или бесконечность. В большинстве случаев при вычислении пределов функций подстановка предельного значения переменной в предельное выражение приводит к так называемым ***неопределённостям***, т.е. не даёт в результате конечного числа или ∞. Тогда предел функции вычисляют с помощью различных специальных приёмов в зависимости от типа неопределённости.

Типы неопределённостей:

$$\frac{\infty}{\infty},\quad \frac{0}{0},\quad 1^{\infty},\quad \infty-\infty,\quad 0^{\infty},\quad 0\cdot\infty$$

СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ. ПРИНЦИП ЗАМЕНЫ ЭКВИВАЛЕНТНЫМИ

Величина (функция) $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой*** при $x\to a$, если

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0.$$

Теорема (связь между пределом функции и бесконечно малой).

Если функция $y=y(x)$ при $x\to a$ имеет пределом число A, то функцию $y=y(x)$ можно представить в виде суммы числа A и бесконечно малой $\alpha(x)$ при $x\to a$, т.е.

$$\lim_{x\to a} y(x)=A \quad\Rightarrow\quad y(x)=A+\alpha(x)$$

Свойства бесконечно малых функций:

1. Сумма или разность двух бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.
2. Произведение бесконечно малой функции на функцию ограниченную есть бесконечно малая функция.

Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x\to a$ можно сравнить между собой, вычислив предел их отношения.

1. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то $\alpha(x)$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $\beta(x)$.

2. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$, то $\alpha(x)$ есть бесконечно малая низшего порядка, чем $\beta(x)$.

3. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq 0$, то $\alpha(x)$ есть бесконечно малая того же порядка, что и $\beta(x)$.

В частности, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***эквивалентными бесконечно малыми*** $(\alpha\approx\beta)$.

Вычисление некоторых пределов заметно упрощается, если пользоваться

принципом замены эквивалентными:

при нахождении предела дроби можно бесконечно малые множители, стоящие в числителе или в знаменателе, заменять эквивалентными величинами.

Некоторые, наиболее часто применяемые эквивалентности:

$$\sin x\approx x \qquad (x\to 0)$$
$$\arcsin x\approx x \qquad (x\to 0)$$
$$tgx\approx x \qquad (x\to 0)$$
$$arctgx\approx x \qquad (x\to 0)$$
$$1-\cos x\approx\frac{x^2}{2} \qquad (x\to 0)$$
$$\sqrt[n]{1+x}-1\approx\frac{x}{n} \qquad (x\to 0)$$
$$a^x-1\approx x\ln a \qquad (x\to 0)$$
$$e^x-1\approx x \qquad (x\to 0)$$
$$\log_a(x+1)\approx\frac{x}{\ln a} \qquad (x\to 0)$$
$$\ln(1+x)\approx x \qquad (x\to 0)$$

I специальный (замечательный) предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Этот предел позволяет заменять функцию синус при достаточно малых значениях аргумента самим аргументом, т.е. $\sin x \approx x$ при $x \to 0$.

Для более общего случая I специальный (замечательный) предел имеет вид:

$$\lim_{x \to a} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1, \quad где \quad \lim_{x \to a} u(x) = 0$$

II специальный (замечательный) предел

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

или

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

2. Методика решения типовых задач

2.1 Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sin 7x}$.

Решение. В данном предельном выражении присутствуют тригонометрические функции, в таком случае для раскрытия неопределённости $\frac{0}{0}$ используется $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

В данном примере т.к. при $x \to 0$, аргументы $5x$ и $7x$ также стремятся к 0, поэтому можно заменить тригонометрические функции, стоящие в предельном выражении, их аргументами:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 7x} = \lim_{x \to 0} \frac{5x}{7x} = \lim_{x \to 0} \frac{5}{7} = \frac{5}{7}.$$

2.2 Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg 6x}{\sin 8x}$.

Решение. Выполним преобразование предельного выражения:

$$\lim_{x \to 0} \frac{tg 6x}{\sin 8x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin 6x}{\cos 6x} \cdot \frac{1}{\sin 8x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{6x}{8x \cdot \cos 8x} =$$

$$\frac{3}{4} \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos 8x} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\cos 0} = \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}.$$

2.3 Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x - 3}{x + 1} \right)^{x-1}$.

Решение. Предельное выражение $\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{x-1}$ при $x \to \infty$ представляет собой степень, основание которой стремится к 1, а показатель к ∞, т.е. в данном случае имеем неопределённость типа 1^{∞}, для раскрытия которой применяю

II специальный (замечательный) предел

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ или $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$.

Преобразуем выражение таким образом, чтобы применить II замечательный предел, для этого выделим из дроби целую часть:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{x-1} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+1)-4}{x+1}\right)^{x-1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{x+1}\right)^{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-4}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-4}}\right]^{\frac{-4}{x+1}\cdot(x-1)} = e^{-4\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1}} = e^{-4\cdot 1} = e^{-4} = \frac{1}{e^4}.$$

2.4 Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$.

Решение. В предельном выражении стоит отношение двух бесконечно малых функций. Для вычисления данного предела воспользуемся принципом замены эквивалентными:

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 \approx x^2, \quad 1-\cos x \approx \frac{x^2}{2}, \ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1-\sin 2x}-1\right)\left(e^{arctg^2 3x}-1\right)}{(1-\cos 2x)\ln(1+5x)}$

Решение. Применим принцип замены эквивалентными. При $x \to 0$

$$\sin x \sim tgx \sim \arcsin x \sim arctgx \sim x,\ 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2},\ \ln(1+x) \sim x,$$

$$a^x - 1 \sim x\cdot\ln a,\ e^x - 1 \sim x,\ \log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a},\ \ln(1+x) \sim x,\ (1+x)^p - 1 \sim px, \quad p > 0.$$

Для решаемой задачи

$$\sqrt{1-\sin 2x} - 1 = (1-\sin 2x)^{1/2} - 1 \sim \frac{1}{2}(-\sin 2x) \sim \frac{1}{2}(-2x) = -x,$$

$$e^{arctg^2 3x} - 1 \sim (arctg 3x)^2 \sim (3x)^2 = 9x^2,\ 1-\cos 2x = 2\sin^2 x \sim 2x^2,\ \ln(1+5x) \sim 5x.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1-\sin 2x}-1\right)\left(e^{arctg^2 3x}-1\right)}{\left(1-\cos 2x\right)\ln\left(1+5x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(-x\right)\cdot 9x^2}{2x^2\cdot 5x}=-\frac{9}{10}.$$

4. Порядок выполнения практической работы

4.1 Изучить краткие теоретические сведения.
4.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
4.3 Ответить на контрольные вопросы

5. Содержание отчёта

5.1Тема и цель работы.
5.2 Решение заданий.
5.3Ответы на контрольные вопросы.

6. Контрольные вопросы

6.1 Дайте определение предела функции.
6.2 Сформулируйте основные теоремы о пределах.
6.3 Запишите первый специальный предел. Когда его применяют?
6.4 Запишите второй специальный предел. Для раскрытия какой неопределённости его применяют?

7.Список справочной литературы

6.1 Алексеева Е.В. «Функции. Пределы. Непрерывность»: учебное пособие для студентов 1-го , 2-го курса технических специальностей по разделу дисциплин «Элементы высшей математики», «Математика»
6.2 Конспект теоретических занятий

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вычислить пределы следующих функций:

ВАРИАНТ 1	ВАРИАНТ 2
1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\sin x}$	**1.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^{x}-1)}{1-\cos x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x\sin^2 x}$	**2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 4x}{3x^2}$	**3.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\sin x}{x^2}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x^2}{3+x^2}\right)^{4x^2}$	**4.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{5x}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+5}\right)^{\frac{1}{5x}}$	**5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-5}{6x-7}\right)^{2x-1}$
ВАРИАНТ 3	**ВАРИАНТ 4**
1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1-6x)}$	**1.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\arcsin 3x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx+\sin x}{2x}$	**2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}$	**3.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3\frac{x}{3}}{x^3}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+1}{3x^2-2}\right)^{5x^2}$	**4.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-5}{2x+3}\right)^{7x}$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-5}\right)^{\frac{1}{2x}}$	**5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+3}\right)^{3x}$

Практическое занятие №9

Тема: Вычисление производных суммы, разности, произведения, частного элементарных функций. Вычисление производных сложных функций

1. **Цель работы:** получить практические навыки нахождения производных различных функций.
2. **Время выполнения работы:** 2 академических часа.
3. **Краткие теоретические сведения:**

Производной функции $y = y(x)$ называется предел отношения приращения функции (Δy) к приращению аргумента (Δx), когда приращение аргумента стремится к нулю.

y' - обозначение производной функции $y = y(x)$.

Согласно определению

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Основные правила дифференцирования:

1. ***Производная постоянной величины.***

$$C' = 0.$$

2. ***Производная суммы***

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

3. ***Производная произведения.***

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Следствие.

$$(cu)' = cu'.$$

4. ***Производная частного***.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

5. **Производная сложной функции**

Сложной называется функция, у которой аргумент также является функцией.

Символически сложную функцию обозначают

$$y = y(f(x)),$$

где $f(x)$ - промежуточный аргумент сложной функции y.

При нахождении производной сложной функции используют ***правило дифференцирования сложной функции*** и ***таблицей производных сложных функций.***

Правило дифференцирования сложной функции

$$y' = y_f' \cdot f_x'$$

Практическое правило: чтобы найти производную сложной функции её надо продифференцировать как простую, сохраняя аргумент и результат умножить на производную этого аргумента.

6. Таблица производных элементарных функций.

1. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$, в частности $x' = 1$, $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$,

$(kx+b)' = k$.

2. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$, в частности $\left(e^x\right)' = e^x$.
3. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$, в частности $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
4. $(\sin x)' = \cos x$.
5. $(\cos x)' = -\sin x$.
6. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
7. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
8. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
9. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
11. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

7. Таблица производных сложных функций

1. $\left(u^n\right)' = nu^{n-1} \cdot u'$, в частности $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$,

$\left((ax+b)^n\right)' = an(ax+b)^{n-1}$

2. $\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, в частности $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$.

3. $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}$, в частности $\left(\ln u\right)' = \dfrac{u'}{u}$.

4. $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$.

5. $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$.

6. $\left(tgu\right)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

7. $\left(ctgu\right)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$.

8. $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

9. $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

10. $\left(arctgu\right)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

11. $\left(arcctgu\right)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

2. Методика решения типовых задач

2.1 Пример 1. Найти производную функции $y = 5x^3 - 3x^2 + \ln x$.

Решение. Применим последовательно правила дифференцирования производная суммы нескольких функций, вынесение постоянного множителя за знак производной и формулы из таблицы производных 2 и 4, получим:

$$y' = \left(5x^3 - 3x^2 + \ln x\right)' = 5\left(x^3\right)' - 3\left(x^2\right)' + \left(\ln x\right)' = 5 \cdot 3x^{3-1} - 3 \cdot 2x^{2-1} + \frac{1}{x} = .$$

$$= 15x^2 - 6x + \frac{1}{x}.$$

Пример 2. Найти производную функции $y = \sqrt{x} - \dfrac{5}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{x^2}$.

Решение. Представим каждое слагаемое в правой части уравнения функции в виде степени:

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{-\frac{2}{3}}, \quad \frac{1}{x^2} = x^{-2},$$

тогда

$$y' = \left(\sqrt{x} - \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x^2} \right)' =$$

$$\left(x^{\frac{1}{2}} - 5x^{-\frac{2}{3}} - x^{-2} \right)' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} - 5 \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) x^{-\frac{2}{3}-1} - (-2) x^{-2-1} = ,$$

$$= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{10}{3} x^{-\frac{4}{3}} + 2x^{-3}$$

2.2 Пример 3. Найти производную функции $y = e^x \cdot arctgx$.

Решение. Применим правило дифференцирования производная частного, получим:

$$y' = \left(e^x \cdot arctgx\right)' = \left(e^x\right)' \cdot arctgx + e^x \cdot \left(arctgx\right)' = e^x \cdot arctgx + e^x \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

2.3 Пример 4. Найти производную функции $y = \dfrac{\cos x}{9^x - 3x^2}$.

Решение. Применим правило дифференцирования производная частного:

$$y' = \left(\frac{\cos x}{9^x - 3x^2} \right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \left(9^x - 3x^2\right) - \cos x \cdot \left(9^x - 3x^2\right)'}{\left(9^x - 3x^2\right)^2} = .$$

$$= \frac{-\sin x \cdot \left(9^x - 3x^2\right) - \cos x \cdot \left(9^x \ln x - 6x\right)}{\left(9^x - 3x^2\right)^2}$$

2.4 Пример 5. Найти производную функции $y = \sin^3 x$

Решение. Продифференцируем данную функцию как степенную с промежуточным аргументом $\sin x$, получим:

$$y' = 3\sin^2 x \cdot (\sin x)' = 3\sin^2 x \cdot \cos x.$$

Пример 6. Найти производную функции $y = \ln \cos x$.

Решение. Продифференцируем данную функцию как логарифмическую с промежуточным аргументом $\cos x$, получим:

$$y' = \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' = \frac{-\sin x}{\cos x} = -tgx.$$

Пример 7. Найти производную функции $y = \ln \sin \dfrac{x+2}{x}$.

Решение. Продифференцируем данную функцию как сложный логарифм, аргументом которого также является сложная функция синус:

$$y' = \left(\ln \sin \frac{x+2}{x} \right)' = \frac{1}{\sin \frac{x+2}{x}} \cdot \left(\sin \frac{x+2}{x} \right)' = \frac{1}{\sin \frac{x+2}{x}} \cdot \cos \frac{x+2}{x} \cdot \left(\frac{x+2}{x} \right)' =$$

$$=ctg\,\frac{x+2}{x}\cdot\frac{(x+2)'\cdot x-(x+2)\cdot x'}{x^2}=ctg\,\frac{x+2}{x}\cdot\frac{x-x-2}{x^2}=-\frac{2}{x^2}\,ctg\,\frac{x+2}{x}.$$

4. Порядок выполнения практической работы

4.1 Изучить краткие теоретические сведения.
4.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
4.3 Ответить на контрольные вопросы

5. Содержание отчёта

5.1Тема и цель работы.
5.2 Решение заданий.
5.3Ответы на контрольные вопросы.

6. Контрольные вопросы

5.1 Дайте определение производной функцию
5.2 Сформулируйте правила дифференцирования.

7.Список справочной литературы

6.1 Алексеева Е.В. Дифференциальное исчисление функции одной переменной: учебное пособие для студентов 1-го и 2-го курса технических специальностей по разделу дисциплины «Математика»

6.2 Конспект теоретических занятий

ПРИЛОЖЕНИЕ

Найти производные следующих функций:

ВАРИАНТ №1	ВАРИАНТ №2
№1. $y=5\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{3}{x^3}-\frac{4}{x}$ №2. $y=arctgx\cdot\ln 2x$ №3. $y=\frac{\cos 8x}{ctgx+3x^2}$ №4. $y=\left(5x^2+e^{3x}\right)\cdot arcctgx$ №5 $y=\ln\frac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x}$	№1 $y=6x^2-\frac{5}{x^3}-\sqrt[3]{x^4}+\frac{9}{\sqrt{x}}$ №2 $y=e^{-2x}\cdot\ln(3x+4)$ №3. $y=\frac{x-\sin 4x}{\sqrt{x}}$ №4. $y=arctg6x\cdot\left(e^{tgx}+2\right)$ №5. $y=\cos\ln\left(2x-x^2\right)$
ВАРИАНТ №3	**ВАРИАНТ №4**
№1. $y=2\sqrt[4]{x}+9x^2-5\sqrt[3]{x^2}+\frac{7}{x^2}$ №2. $y=\arccos x\cdot e^{-3x}$ №3. $y=\frac{tg4x}{\sin x+5x}$ №4. $y=(2+3\arcsin 7x)\cdot\left(x^2+\ln\left(x^2+1\right)\right)$ №5. $y=\sin^2\frac{1-x}{1+x}$	№1. $y=5\sqrt{x}+3\sqrt[4]{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{4}{\sqrt[3]{x}}$ №2. $y=\ln(2x+1)\cdot arctgx$ №3. $y=\frac{e^{2x}-3}{\cos x}$ №4. $y=\left(2\arccos 3x+5x^3\right)\cdot e^{tgx}$ №5. $y=\ln\sin\frac{x+2}{x}$

Практическое занятие №10

Тема: Исследование функций при помощи производных, построение графиков функций. Решение прикладных задач при помощи производных функций

1. **Цель работы:** получить практические навыки исследования функции на монотонность и экстремумы, выпуклость и вогнутость, точки перегиба графика функции, составления уравнений касательной и нормали к графикам функции, нахождения асимптот графика функции.
2. **Время выполнения работы:** 2 академических часа.
3. **Краткие теоретические сведения:**

Интервалом (промежутком) возрастания функции называется промежуток из области определения функции, на котором функция возрастает.

Интервалом (промежутком) убывания функции называется промежуток из области определения функции, на котором функция убывает.

Интервалы возрастания и убывания функции называются ***интервалами (промежутками) монотонности*** функции.

Интервалы монотонности функции можно определить с помощью первой производной.

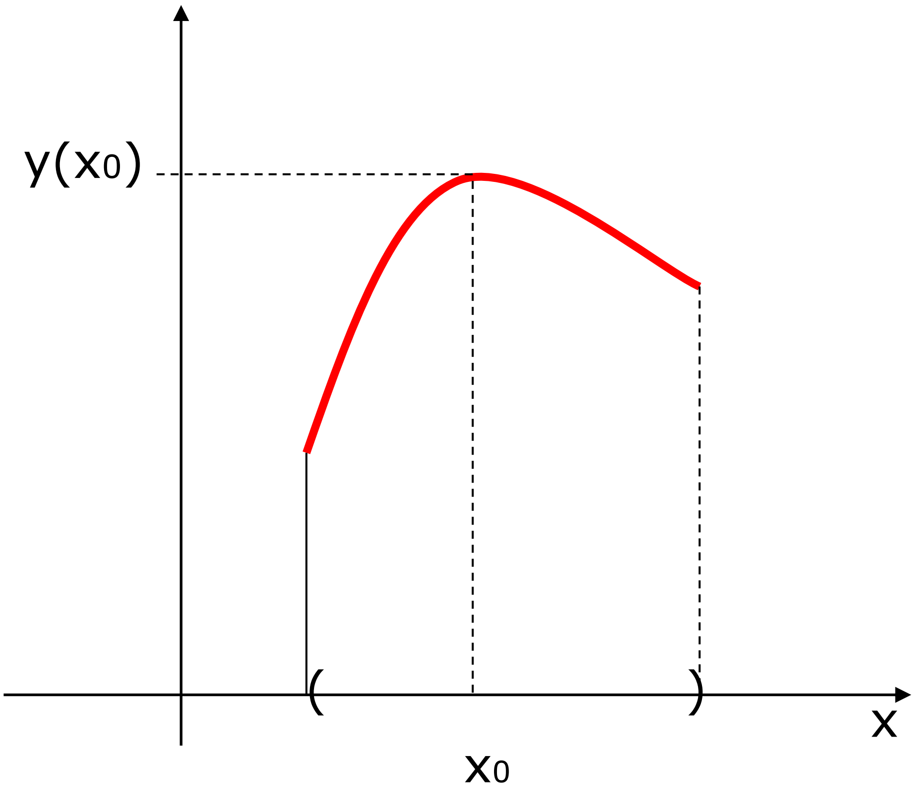
Правило нахождения интервалов (промежутков) монотонности функции:

1. Найти область определения функции.
2. Найти производную $f'(x)$ функции, а затем определить точки x_0, в которых производная равна 0 или ∞ (***критические точки***), т.е. решить уравнения $f'(x) = 0$ и $f'(x) = \infty$.
3. Область определения функции разбить критическими точками на числовые промежутки и определить знак $f'(x)$ в каждом из полученных числовых промежутков.
4. В тех промежутках, где $f'(x) \succ 0$ функция возрастает, в тех промежутках, где $f'(x) \prec 0$ функция убывает.

Экстремумы функции

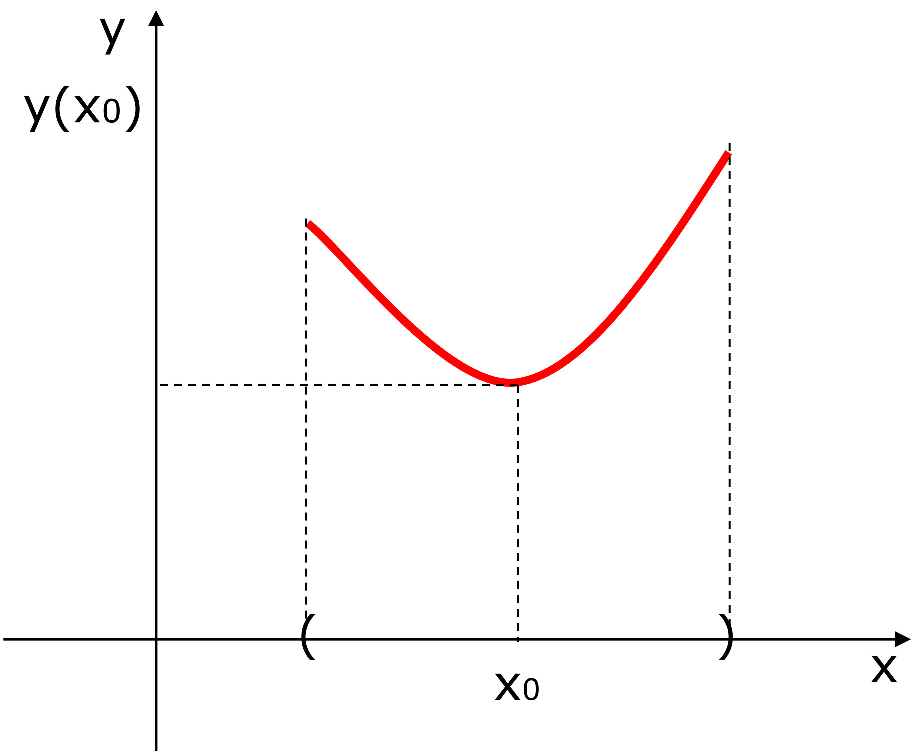
Точка x_0 из области определения функции называется ***точкой максимума***, если в некоторой окрестности этой точки выполняется условие

$$y(x_0) \succ y(x).$$



Точка x_0 из области определения функции называется ***точкой минимума***, если в некоторой окрестности этой точки выполняется условие

$$y(x_0) \prec y(x).$$



Точки максимума и минимума функции называются ***точками экстремума*** функции.

Значения функции в точках максимума и точках минимума называются ***максимумом*** и ***минимумом функции*** соответственно.

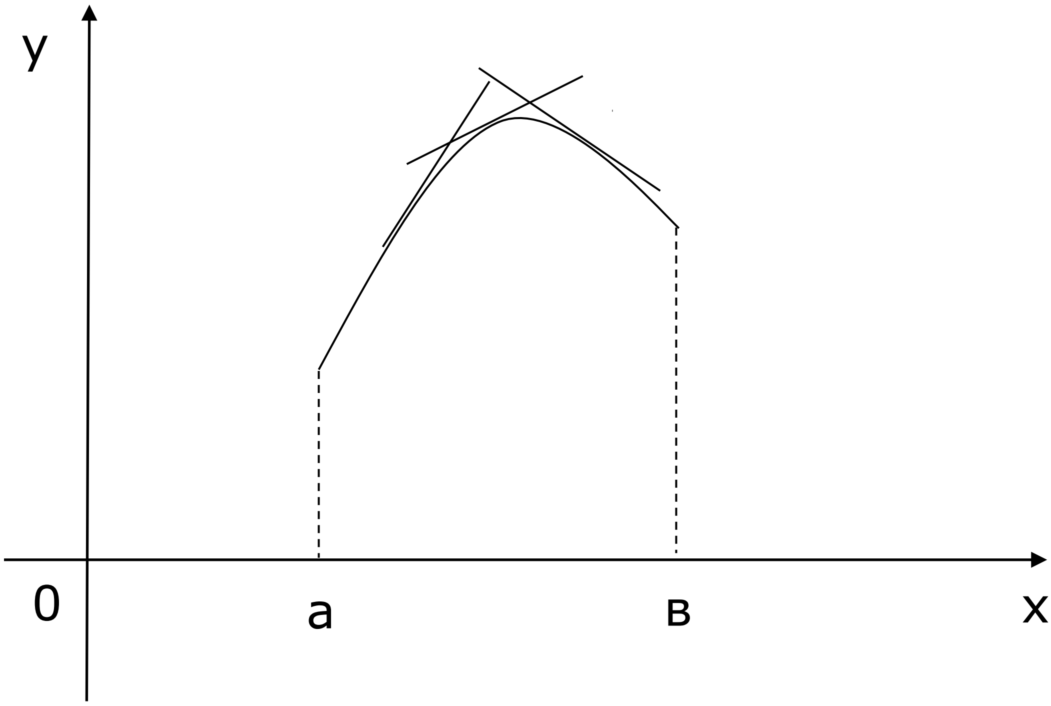
Максимум и минимум функции называются ***экстремумами функции.***

Правило нахождения экстремумов функции с помощью первой производной:

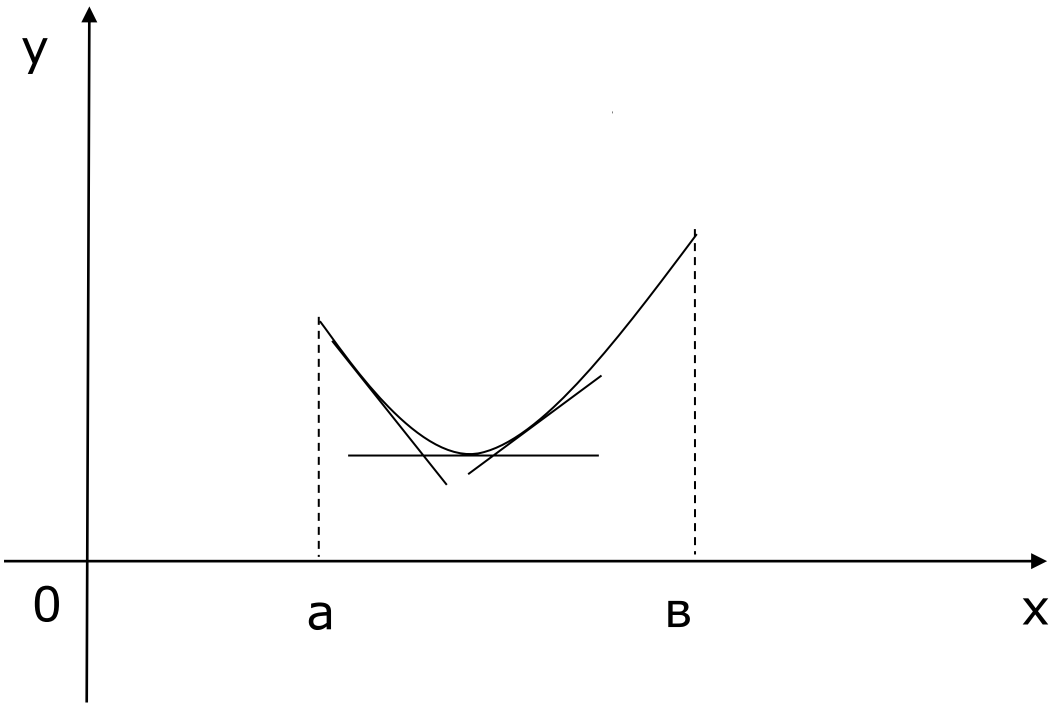
1. Найти область определения функции.
2. Найти критические точки x_0 функции $y = f(x)$, т.е. те точки из области определения функции, в которых $f'(x) = 0$ или $f'(x) = \infty$.
3. Найденными точками разбить область определения функции на числовые промежутки.
4. Определить знак $f'(x)$ в каждом из полученных числовых промежутков.
5. Если при переходе через критическую точку x_0 производная функции $f'(x)$ **меняет свой знак**, то точка x_0 **является точкой экстремума** функции; если **знак** $f'(x)$ **не меняется**, то точка x_0 **точкой экстремума не является.** При этом если при переходе через рассматриваемую точку x_0 слева направо знак $f'(x)$ меняется **с минуса на плюс**, то x_0 - **точка минимума**, если **с плюса на минус**, то x_0 **- точка максимума**.
6. Для нахождения экстремумов функции вычислить значения функции $y = f(x)$ в точках экстремума.

Интервалы выпуклости и вогнутости графика функции. Точки перегиба.

Промежуток из области определения функции, на котором график функции лежит ниже любой касательной, проведённой к графику в любой точке из этого промежутка, называется **промежутком выпуклости графика функции**.



Промежуток из области определения функции, на котором график функции лежит выше любой касательной, проведённой к графику в любой точке из этого промежутка, называется **промежутком вогнутости графика функции**.



Точка, в которой промежуток выпуклости графика функции сменяется промежутком вогнутости, называется **точкой перегиба**.

Промежутки выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба находят с помощью второй производной.

Правило нахождения промежутков выпуклости и вогнутости графика функции и точек перегиба:

1. Найти область определения функции.
2. Найти вторую производную функции $y = y(x)$.
3. Найти корни уравнения $y''(x) = 0$.
4. Найденными корнями разбить область определения функции на числовые промежутки.
5. Определить знак второй производной в каждом из полученных числовых промежутков.
6. В промежутке, в котором y'' имеет **знак +**, график функции является **вогнутым**, в промежутке, в котором y'' имеет **знак -**, график функции является **выпуклым.**

Уравнения касательной и нормали к кривой:

Уравнение касательной, проведённой к графику функции $y = y(x)$ в точке с абсциссой, x_0 имеет вид:

$$y - y(x_0) = y'(x_0) \cdot (x - x_0) \qquad (1)$$

Уравнение нормали, проведённой к графику функции в точке с абсциссой x_0, имеет вид

$$y - y(x_0) = -\frac{1}{y'(x_0)} \cdot (x - x_0) \quad (2)$$

Замечание. Уравнение (2) задаёт нормаль в точке с абсциссой x_0 к графику функции $y = y(x)$, если в точке x_0 существует отличная от нуля производная $y'(x_0)$.

Если $y'(x_0) = 0$, то касательная в $(\cdot)\, x_0$ будет параллельна оси OX и иметь уравнение

$$y = y_0,$$

а нормаль в этой точке будет перпендикулярна оси OX и иметь уравнение

$$x = x_0$$

Если производная функции в точке x_0 бесконечна $\left(y'(x_0) = \infty\right)$, то уравнение касательной имеет вид

$$x = x_0,$$

а уравнение нормали имеет вид $y = y_0$,

Асимптоты графика функции:

Определение. ***Асимптотой*** графика функции $y = y(x)$ называется прямая линия, расстояние до которой от точки кривой $y = y(x)$ стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой.

Различают два вида асимптот: ***вертикальные*** и ***наклонные***, которые могут вырождаться в ***горизонтальные***.

Уравнение вертикальной асимптоты графика функции $y = y(x)$ имеет вид

$$x = a,$$

где число a находят из соотношения $\lim\limits_{x \to a} y(x) = \infty$.

Уравнение наклонной асимптоты имеет вид:

$$y = kx + b,$$

где коэффициенты k и b находят по формулам

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x \to \pm\infty} [y(x) - kx].$$

При $k = 0$ наклонная асимптота вырождается в горизонтальную.
Замечание. Функция-многочлен асимптот не имеет.

Общая схема исследования функции и построение её графика

Общее исследование функции и построение её графика удобно выполнять по следующей схеме:

1. Найти область определения функции.
2. Найти точки пересечения графика функции с осями координат (если это не представляется затруднительным).
3. Если область определения функции является симметричным числовым множеством, выяснить обладает ли функция свойством чётности или нечётности.
4. Найти асимптоты графика функции.

5. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции.
6. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции.
7. По результатам исследования построить график функци

2. Методика решения типовых задач

2.1 Пример 1. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции $y = 6x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 6x$.

Решение. Область определения функции $D(y) = R$. Найдём производную функции

$$y' = 24x^3 - 24x^2 - 6x + 6 = 6\left(4x^3 - 4x^2 - x + 1\right) = 6\left(4\left(x^3 - x^2\right) - (x-1)\right) =$$
$$= 6\left(4x^2(x-1) - (x-1)\right) = 6(x-1)\left(4x^2 - 1\right) = 6(x-1)(2x-1)(2x+1).$$

Производная обращается в ноль при $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$. Эти точки разбивают область определения функции на 4 числовых промежутка, в каждом из которых y' сохраняет определённый знак. Найдём знаки производной в каждом из полученных промежутков:

x	$\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}; 1\right)$	1	$(1; \infty)$
y'	-	0	+	0	-	0	+
y	убывает	min	возрастает	max	убывает	min	возрастает

Найдём значения функции в точках экстремума (экстремумы функции):

$$y\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{19}{8}, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{8}, \quad y(1) = 1.$$

Таким образом, максимумов функция достигает в точках $\left(-\frac{1}{2}; \frac{13}{8}\right)$ и $\left(\frac{1}{2}; \frac{13}{8}\right)$, минимума в точке $(1;1)$.

2.2 Пример 2. Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции $y = x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 31x - 37$.

Решение. Область определения данной функции $D(y) = R$.

Найдём вторую производную функции:

$$y' = \left(x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 31x - 37\right)' = 4x^3 - 30x^2 + 72x - 31.$$

$$y'' = \left(4x^3 - 30x^2 + 72x - 31\right)' = 12x^2 - 60x + 72.$$

Найдём нули второй производной

$$12x^2 - 60x + 72 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = 3.$$

Полученные результаты занесём в таблицу и определим знак второй производной в каждом из полученных числовых промежутков:

x	$(-\infty;2)$	2	$(2;3)$	3	$(3;\infty)$
y''	+	0	-	0	+
y	график вогнутый	-19	график выпуклый	5	график вогнутый

2.3 Пример 3. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = 2x^2 - 6x + 3$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$**.**

Решение. Уравнение касательной к графику функции $y = y(x)$ в точке с абсциссой x_0 имеет вид

$$y - y(x_0) = y'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

Найдём $y(x_0)$. Т.к. $x_0 = 1$, то $y(1) = 2\cdot 1 - 6\cdot 1 + 3 = -1$.

Найдём производную данной функции:

$$y' = \left(2x^2 - 6x + 3\right)' = 4x - 6\textbf{.}$$

Найдём значение производной в точке $x_0 = 1$, получим

$$y'(1) = 4\cdot 1 - 6 = -2.$$

Подставим в формулу для уравнение касательной $x_0 = 1, \quad y(x_0) = y(1) = -1, \quad y'(x_0) = y'(1) = -2$, получим

$$y - (-1) = -2(x - 1),$$

после упрощения получим искомое уравнение касательной:

$$y = -2x + 1.$$

Уравнение нормали получим подставив в уравнение касательной вместо углового коэффициента -2 коэффициент $\dfrac{1}{2}$ (по условию перпендикулярности двух прямых), получим

$y = \dfrac{1}{2}x + 1.$

Пример 4. Найти асимптоты кривой $y = \dfrac{-x^2 + 7x}{x - 3}$.

Решение. Кривая имеет вертикальную асимптоту $x = 3$, т.к. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{-x^2 + 7x}{x - 3} = \infty$.

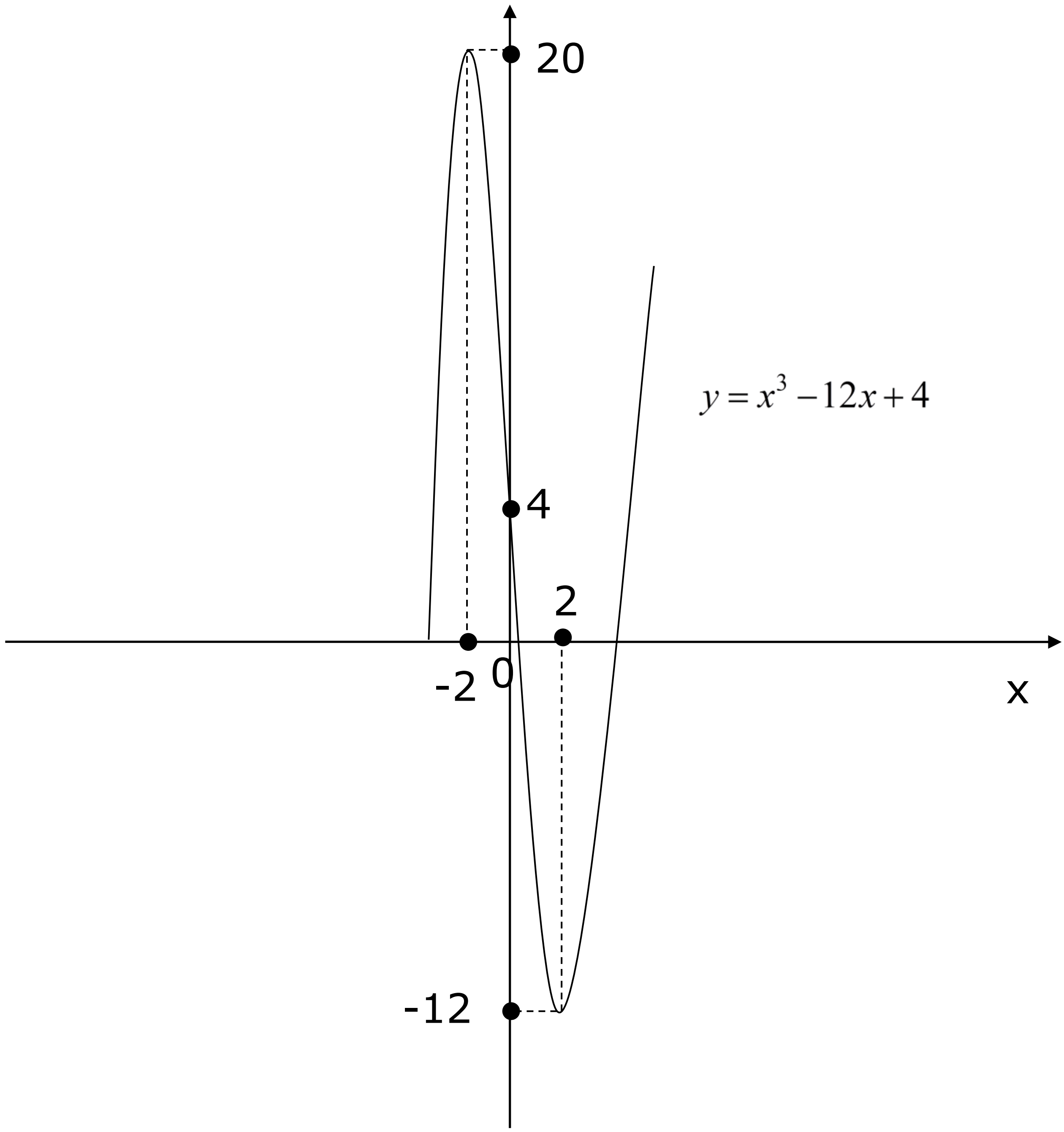
Найдём наклонную асимптоту:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-x^2 + 7x}{x(x - 3)} = -1, \qquad b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{-x^2 + 7x}{x - 3} + x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-x^2 + 7x + x^2 - 3x}{x - 3} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4x}{x - 3} = 4$$

.

Следовательно, уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = -x + 4$



4. Порядок выполнения практической работы

4.1 Изучить краткие теоретические сведения.
4.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
4.3 Ответить на контрольные вопросы

5. Содержание отчёта

5.1Тема и цель работы.
5.2 Решение заданий.
5.3Ответы на контрольные вопросы.

6. Контрольные вопросы

6.1 Дайте определение промежутков монотонности функции.
6.2 Сформулируйте правило нахождения промежутков монотонности функции с помощью первой производной.
6.3 Дайте определение точки максимума и точки минимума функции.
6.4 Сформулируйте определение максимума и минимума функции.
5.5 Сформулируйте правило нахождения экстремумов функции с помощью первой производной.
6.6 Дайте определение интервалов выпуклости и вогнутости графика функции и точек перегиба.
6.7 Сформулируйте правило нахождения промежутков выпуклости и вогнутости графика функции и точек перегиба.
6.8 Запишите уравнение касательной к графику функции в точке с заданной абсциссой.
6.9 Запишите уравнение нормали к графику функции в точке с заданной абсциссой.
6.10 Дайте определение асимптоты графика функции.
6.11 Перечислите виды асимптот.
6.12 Запишите уравнение вертикальной асипмтоты.
6.13 В каком виде записывают уравнение наклонной асимптоты?

7.Список справочной литературы

6.1 Алексеева Е.В. Дифференциальное исчисление функции одной переменной: учебное пособие для студентов 1-го и 2-го курса технических специальностей по разделу дисциплины «Математика»
6.2 Конспект теоретических занятий

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВАРИАНТ №1	ВАРИАНТ №2
№1. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ №2. Найти промежутки выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции $y = -x^4 - 2x^3 + 12x^2$ №3. Написать уравнение касательной к кривой $y = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$в точке с абсциссой $x_0 = 2$. №4.Исследовать функцию и построить её график $y = x^3 - 3x + 2$.	№1. Найти промежутки монотонности и точки экстремума функции $y = 3x^2 - 8x^3$ №2. Найти промежутки выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции $y = 3x^5 - 10x^4 - 30x^3 + 12x + 7$ №3. Написать уравнение касательной к кривой $y = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$. №4. Исследовать функцию и построить её график $y = x^4 - 2x^3$.
ВАРИАНТ №3	**ВАРИАНТ №4**
№1. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции $y = 16x + 2x^2 - \frac{16}{3}x^3 - x^4$. №2. Найти промежутки выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции $y = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 5x + 3$ №3. Написать уравнение касательной нормали к кривой $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 3x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$. №4.Исследовать функцию и построить её график $y = x^4 - 4x^2 + 3$.	№1. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции $y = x^4 + 8x^3 + 5$ №2. Найти промежутки выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции $y = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 5x + 2$ №3. Написать уравнение касательной и нормали к графику функции $y = -x^3 + 2x^2 - x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$. №4. Исследовать функцию и построить её график $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

Практическое занятие №11

Тема: Вычисление неопределенных интегралов по таблице, методом замены и по частям

1. **Цель работы:** получить практические навыки нахождения неопределённых интегралов различными способами.
2. **Время выполнения работы:** 2 академических часа.
3. **Краткие теоретические сведения:**

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, если для всех значений x из этого промежутка выполняется

$$F'(x) = f(x).$$

Теорема.

Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, то функция

$$F(x) + C,$$

где C - произвольная постоянная, также является первообразной для $f(x)$ на этом же промежутке.

Определение.

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$, определённых на некотором промежутке, называется *неопределённым интегралом* от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается символом

$$\int f(x)dx.$$

Читается: «интеграл от эф от икс де икс».

По определению

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$f(x)$ - подынтегральная функция,

$f(x)dx$ - подынтегральное выражение,

x - переменная интегрирования,

$\int$ - знак неопределённого интеграла,

С - постоянная величина (константа).

Нахождение неопределённого интеграла по данной подынтегральной функции называется ***интегрированием***этой функции.

Так как интегрирование представляет собой операцию, обратную дифференцированию, то для того чтобы проверить, правильно ли выполнено интегрирование, достаточно продифференцировать результат и получить при этом подынтегральную функцию.

Основные свойства неопределённого интеграла

1.Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2. Дифференциал неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

3. Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная.

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

5. Неопределённый интеграл от алгебраической суммы двух или более функций равен алгебраической сумме интегралов от каждой из этих функций.

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(dx) \pm \int g(x)dx.$$

Таблица простейших интегралов

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, где $n \neq -1$, $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, в частности, $\int e^x dx = e^x + C$

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\int \sin axdx = -\dfrac{1}{a}\cos ax + C$

5. $\int \cos x dx = \sin x + C$ $\int \cos axdx = \dfrac{1}{a}\sin ax + C$

6. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

8. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$, $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$

9. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$, $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C$

10. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C$.

Интегралы, содержащиеся в данной таблице, называются ***табличными*** интегралами.

Основные методы интегрирования.

Задача интегрирования принципиально труднее задачи дифференцирования. Так, например, таблица интегралов не исчерпывает даже основных элементарных функций, не говоря уже о сложных функциях.

Не существует также правил интегрирования произведения, частного, сложной и обратной функций.

Существуют лишь отдельные методы, позволяющие интегрировать отдельные классы подынтегральных функций, и выбор того или иного метода интегрирования зависит от вида подынтегральной функции.

Непосредственное интегрирование.

Непосредственное интегрирование - это такой способ интегрирования, при котором данный интеграл с помощью различных преобразований подынтегральной функции и свойств неопределённого интеграла сводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Метод замены переменной (способ подстановки).

Найти заданный неопределённый интеграл непосредственным интегрированием удаётся далеко не всегда, а иногда это сопряжено с большими трудностями. В таких случаях применяют другие способы интегрирования.

Одним из наиболее эффективных методов является ***способ подстановки*** или ***замены переменной интегрирования***.

Сущность этого метода заключается в том, что путём введения новой переменной интегрирования удаётся свести заданный интеграл к новому интегралу, который сравнительно лёгко берётся непосредственно.

Алгоритм метода:

Пусть дан интеграл $\int f(x)dx$, который не является табличным.

1. Записываем уравнение замены
$$y = y(x),$$
где $y(x)$ - некоторая функция.
2. Находим дифференциал этой функции
$$dy = y'(x)dx.$$
3. Выражаем
$$dx = \frac{dy}{y'(x)}.$$
4. Подставим y и dy в данный интеграл:
$$\int f(x)dx = \int g(y)dy.$$
Если замена выполнена правильно, то
$$\int g(y)dy$$
будет табличным.
5. Находим
$$\int g(y)dy = F(y) + C.$$
6. Чтобы получить окончательный ответ, вместо переменной y подставляем выражение $y(x)$:
$$\int f(x)dx = F(y(x)) + C.$$

Интегрирование по частям.

Интегрирование по частям – это, практически, формула интегрирования произведения двух функций.

Хорошо известна формула дифференциала произведения двух функций:

$$d(uv) = udv + vdu$$

Проинтегрировав обе части данного равенства, получим:

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu,$$

т.к.

$$\int d(uv) = uv,$$

то

$$uv = \int udv + \int vdu,$$

Откуда

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Последняя формула называется ***формулой интегрирования по частям***.

Формула интегрирования по частям сводит нахождение интеграла $\int udv$ к отысканию другого интеграла $\int vdu$; её применение целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл либо проще исходного, либо подобен ему.

При этом в качестве u берётся функция, которую проще продифференцировать, а в качестве dv берётся та часть подынтегрального выражения, которую проще проинтегрировать. Иногда формулу интегрирования по частям приходиться использовать несколько раз.

При применении формулы интегрирования по частям интегралы можно разбить на 3 основные группы:

1. В интегралах вида

$$\int P(x)e^{ax}dx, \qquad \int P(x)\sin axdx, \qquad \int P(x)\cos axdx,$$

где $P(x)$ - многочлен переменной x, a - число, полагают

$$u = P(x), \qquad dv = \begin{cases} e^{ax}dx, \\ \sin axdx, \\ \cos axdx \end{cases}$$

2. В интегралах вида

$$\int P(x)\ln xdx, \quad \int P(x)\arcsin xdx, \quad \int P(x)\arccos xdx,$$
$$\int P(x)arctgxdx, \quad \int P(x)arcctgxdx$$

полагают

$$u=\begin{cases}\ln x,\\ \arcsin x,\\ \arccos x,\\ arctgx,\\ arcctgx\end{cases}\qquad dv=P(x)dx$$

3. В интегралах вида

$$\int e^{ax}\sin bxdx,\quad \int e^{ax}\cos bxdx$$

за u принимают любую функцию, за dv соответственно оставшуюся часть подынтегрального выражения.

2. Методика решения типовых задач

2.1 Пример 1. Найти неопределённый интеграл $\int\left(5x^4-4x^2+3x-1\right)dx$.

Решение. Применим свойство 5:

$$\int\left(5x^4-4x^2+3x-1\right)dx=\int 5x^4dx-4x^2dx+\int 3xdx-\int dx.$$

В первых трёх интегралах применим свойство 4, в четвёртом - свойство 3, а затем табличный интеграл 1, получим:

$$\int 5x^4dx-4x^2dx+\int 3xdx-\int dx=5\int x^4dx-4\int x^2dx+3\int xdx-x=$$

$$=5\cdot\frac{x^5}{5}-4\cdot\frac{x^3}{3}+3\cdot\frac{x^2}{2}-x+C=x^5-\frac{4x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-x+C.$$

Пример 2. Найти неопределённый интеграл $\int\left(5\sqrt[3]{x^2}-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}+1\right)dx$.

Решение. Используем свойства 5 и 4, а также преобразуем каждое слагаемое подынтегральной функции в степень, получим:

$$\int\left(5\sqrt[3]{x^2}-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}+1\right)dx=5\int x^{\frac{2}{3}}dx-3\int x^{-2}dx-2\int x^{-\frac{4}{3}}dx+\int dx=$$

$$=5\cdot\frac{3}{5}\cdot x^{\frac{5}{3}}-3\cdot\frac{x^{-1}}{-1}-2\cdot(-3)\cdot x^{-\frac{1}{3}}+x+C=3\sqrt[3]{x^5}+\frac{3}{x}+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}+x+C.$$

Пример 3. Найти неопределённый интеграл $\int\frac{3x^4+2x^2-3x+7}{x^2}dx$.

Решение. Разделим почленно числитель дроби на знаменатель, получим

$$\int \frac{3x^4 + 2x^2 - 3x + 7}{x^2} dx = \int \left(3x^2 + 2 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2} \right) dx.$$

Применим свойство 5:

$$\int \left(3x^2 + 2 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2} \right) dx = \int 3x^2 dx + \int 2dx - \int \frac{3}{x} dx + \int \frac{7}{x^2} dx =$$

$$= 3\int x^2 dx + 2\int dx - 3\int \frac{dx}{x} + 7\int x^{-2} dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 2x - 3\ln|x| + 7 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + C =$$

$$= x^3 + 2x - 3\ln|x| - \frac{7}{x} + C$$

Пример 4. Найти неопределённый интеграл $\int e^x \left(3 - \frac{e^{-x}}{2\cos^2 x} \right) dx$.

Решение. Раскроем в подынтегральном выражении скобки и применим табличные интегралы 3 и 6, получим:

$$\int e^x \left(3 - \frac{e^{-x}}{2\cos^2 x} \right) dx = 3\int e^x dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos^2 x} = 3e^x - \frac{1}{2} tgx + C.$$

Пример 5. Найти $\int \frac{dx}{4 + 3x^2}$.

Решение. Приведём данный интеграл к табличному интегралу 9:

$$\int \frac{dx}{4 + 3x^2} = \int \frac{dx}{3\left(\frac{4}{3} + x^2 \right)} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 + x^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} arctg \frac{\sqrt{3}x}{2} + C =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6} arctg \frac{\sqrt{3}x}{2} + C.$$

2.2 Пример 1. Найти $\int e^{\frac{x}{2}} dx$.

Решение. Сделаем подстановку $x = 2t$, тогда $dx = 2tdt$. Следовательно,

$$\int e^{\frac{x}{2}} dx = \int e^t \cdot 2dt = 2\int e^t dt = 2e^t + C = 2e^{\frac{x}{2}} + C.$$

Пример 2. Найти $\int (3x-5)^7 dx$.

Решение. Сделаем подстановку $t=3x-5$, тогда $dt=3dx \Rightarrow dx=\frac{dt}{3}$, следовательно,

$$\int (3x-5)^7 dx=\frac{1}{3}\int t^7 dt=\frac{1}{3}\cdot\frac{t^8}{8}+C=\frac{(3x-5)^8}{24}+C.$$

Пример 3. Найти $\int x^2\left(3+2x^3\right)^4 dx$

Решение. Сделаем подстановку $t=3+2x^3$, тогда $dt=6x^2dx \Rightarrow x^2dx=\frac{dt}{6}$, следовательно,

$$\int x^2\left(3+2x^3\right)^4 dx=\frac{1}{6}\int t^4 dt=\frac{1}{6}\cdot\frac{t^5}{5}+C=\frac{\left(3+2x^3\right)^5}{30}+C.$$

Пример 4. Найти $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+2\sin x}}$.

Решение. Подстановка $t=1+2\sin x$, тогда $dt=2\cos x dx \Rightarrow \cos x dx=\frac{dt}{2}$, получим

$$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+2\sin x}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{(1+2\sin x)}+C.$$

Пример 5. Найти $\int \sin(4x+3)dx$.

Решение. Сделаем подстановку $t=4x+3$, тогда $dt=4dx \Rightarrow dx=\frac{dt}{4}$, следовательно,

$$\int \sin(4x+3)dx=\frac{1}{4}\int \sin t dt=-\frac{1}{4}\cos t+C=-\frac{1}{4}\cos(4x+3)+C.$$

Пример 6. Найти $\int x^2 e^{x^3-2}dx$.

Решение. Сделаем подстановку $t=x^3-2$, тогда $dt=3x^2dx \Rightarrow x^2dx=\frac{dt}{3}$, следовательно,

$$\int x^2 e^{x^3-2}dx = \frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3}e^t + C = \frac{1}{3}e^{x^3-2} + C.$$

2.3 Пример 1. Найти $\int (2x+1)e^{3x}dx$.

Решение. Данный интеграл относится к первой группе, поэтому

$$\int (2x+1)e^{3x}dx = \left[\begin{array}{l} u = 2x+1 \Rightarrow du = 2dx, \\ dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array}\right] = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} -$$

$$-\frac{2}{3}\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C.$$

Пример 2. Найти $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$.

Решение. Данный интеграл относится ко второй группе, поэтому положим $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, \quad dv = \frac{dx}{x^3} \Rightarrow v = -\frac{1}{2x^2}$.

Тогда по формуле интегрирования по частям находим:

$$\int \frac{\ln x}{x^3}dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^3} + C.$$

Пример 3. Найти $\int (x-5)\cos x dx$.

Данный интеграл относится к первой группе, поэтому $u = x-5 \Rightarrow du = dx,$ $dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x$, по формуле интегрирования по частям имеем

$$\int (x-5)\cos x dx = (x-5)\sin x - \int \sin x dx = (x-5)\sin x + \cos x + C.$$

4. Порядок выполнения практической работы

4.1 Изучить краткие теоретические сведения.
4.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
4.3 Ответить на контрольные вопросы

5. Содержание отчёта

5.1Тема и цель работы.

5.2 Решение заданий.
5.3Ответы на контрольные вопросы.

6.Контрольные вопросы

6.1 Дайте определение первообразной функции.
6.2Дайте определение неопределенного интеграла.
6.3Сформулируйте свойства неопределенного интеграла.
6.4 В чем состоит метод замены переменного.
6.5 Сформулируйте правило нахождения неопределенного интеграла по частям.

7.Список справочной литературы

7.1 Дадаян А.А. Математика: Учебник для СПО.- М.: Инфра-М, 2019.- 544с.
7.2Дадаян А.А. Сборник задач по математике: Учебное пособие для СПО / А.А. Дадаян.- М.: Форум, 2018.- 352с.
7.3 Конспект теоретических занятий.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВАРИАНТ 1	ВАРИАНТ 2
№1. Вычислите интегралы функций: *1)* $\int (\frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 8)dx$ *2)* $\int \sqrt[4]{x^3}dx$ *№2. Вычислить методом замены переменных:* *1)* $\int sin^2 x \cdot cos\, x\, dx$ *2)* $\int 4x^3 \cdot (x^4 - 5)^7 dx$ *3)* $\int \frac{e^x}{e^x - 3} dx$ *№3. Вычислить, интегрируя по частям:* *1)*$\int x \cdot e^{-3x} dx$ *2)* $\int (2x^2 - 4) \cdot e^{-4x} dx$	*№1. Вычислите интегралы функций:* *1)* $\int x^2 \cdot (1 + 2x)dx$ *2)* $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} dx$ *№2. Вычислить методом замены переменных:* *1)* $\int \sqrt{3x+5}\, dx$ *2)* $\int cos^7 x \cdot sin\, x\, dx$ *3)* $\int \frac{5tgx}{cos^2 x} dx$ *№3. Вычислить, интегрируя по частям:* *1)*$\int ln\, x \cdot (2x - 3)\, dx$ *2)* $\int x^2 \cos 4x\, dx$

ВАРИАНТ 3	ВАРИАНТ 4
№1. Вычислите интегралы функций: 1) $\int (x^4 - 8x^3 + 4x)dx$ 2) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ *№2. Вычислить методом замены переменных:* 1) $\int cos^4 x \cdot sin\, x\, dx$ 2) $\int \frac{8x-2}{4x^2-2x} dx$ 3) $\int e^{3x^3} \cdot x^2\, dx$ *№3. Вычислить, интегрируя по частям:* 1) $\int x3^x dx$ 2) $\int (x^2 - 3) \cdot cos \frac{x}{3} dx$	*№1. Вычислите интегралы функций:* 1) $\int (x+3)^2\, dx$ 2) $\int \frac{3}{4 \cdot \sqrt[4]{x}} dx$ *№2. Вычислить методом замены переменных:* 1) $\int \frac{1}{2x-9} dx$ 2) $\int e^{-\,sin\, x} \cdot cos\, x\, dx$ 3) $\int \frac{e^x}{7e^x-2} dx$ *№3. Вычислить, интегрируя по частям:* 1) $\int x\, sin\, 8x\, dx$ 2) $\int (3x^2 + 2) \cdot sin\, 5x\, dx$

Практическое занятие №12

Тема: Вычисление интегралов от рациональных дробей.

1. **Цель работы:** получить практические навыки вычисленияинтегралов от различных рациональных дробей.
2. **Время выполнения работы:** 2 академических часа.
3. **Краткие теоретические сведения**

Рациональной дробьюназывается дробь вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены переменной x.

Рациональная дробь называется ***правильной,*** если степень многочлена $P(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$; в противном случае дробь называется ***неправильной.***

Простейшими дробяминазываются правильные рациональные дроби следующего вида:

$$\frac{A}{x-a}$$

$$\frac{A}{(x-a)^m}$$, где m - целое число, большее единицы.

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$$, где квадратный трёхчлен x^2+px+q не имеет действительных корней.

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}$$, где m - целое число, большее единицы и квадратный трёхчлен x^2+px+qне имеет действительных корней.

Интегрирование дробей I и II типов производится непосредственно:

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a|+C,$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^m}dx = \frac{A}{1-m}\cdot\frac{1}{(x-a)^{m-1}} + C.$$

Интегрирование дроби III типа было рассмотрено ранее.

Для интегрирования простейшей дроби типа IV в числителе дроби нужно выделить производную знаменателя и разложить полученный интеграл на сумму двух интегралов. Первый из них подстановкой

$$t = x^2 + px + q$$

приводится к виду

$$\int \frac{dt}{t^m} = \frac{1}{(1-m)t^{m-1}},$$

а второй имеет вид

$$\int \frac{dx}{\left(x^2 + px + q\right)^m}.$$

С помощью подстановки

$$t = x + \frac{p}{2}$$

второй интеграл преобразуется в интеграл вида

$$\int \frac{dt}{\left(t^2 + a^2\right)^m},$$

который интегрированием по частям можно свести к более простому интегралу

$$\int \frac{dt}{\left(t^2 + a^2\right)^{m-1}},$$

того же типа, но с показателем в знаменателе уже на единицу меньше.

Повторяя этот процесс, в итоге получают интеграл

$$\int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{t}{a}.$$

Разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей.

Любая правильная рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ может быть единственным образом представлена в виде суммы простейших рациональных дробей.

Для этого знаменатель $Q(x)$ раскладывают на множители, каждый из которых является либо степенью линейной функции $x-a$, либо степенью квадратичной функции x^2+px+q, где $D \prec 0$.

После этого находят простейшие дроби, составляющие в сумме дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

Знаменателями таких простейших дробей могут быть линейные и квадратичные множители, входящие в разложение $Q(x)$, причём не в больших степенях, чем они входят в это разложение.

Каждому сомножителю $(x-a)^k$ разложения $Q(x)$ отвечает в разложении дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ выражение вида

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}, \qquad (1)$$

а каждому сомножителю $\left(x^2+px+q\right)^l$ - выражение вида

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+\frac{B_lx+C_l}{\left(x^2+px+q\right)^l}. \qquad (2)$$

Таким образом, получают следующие практическое ***правило разложения правильной рациональной дроби*** $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ***на простейшие дроби:***

1. Разложить знаменатель $Q(x)$ на линейные и квадратичные множители, не имеющие действительных корней.

2. Записать разложение данной рациональной дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ на простейшие дроби с неопределёнными (буквенными) коэффициентами, используя выражения (1) и (2).

3. Полученное равенство умножить на общий знаменатель.

4. Раскрыть скобки, привести подобные слагаемые и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x.

5. Решить полученную систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов.

Интегрирование рациональных дробей.

Для нахождения интеграла от рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ нужно прежде выделить из неё целую часть (если дробь неправильная), т.е. представить её в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

где $M(x)$ - многочлен, $\frac{R(x)}{Q(x)}$ - правильная рациональная дробь.

После этого дробь $\frac{R(x)}{Q(x)}$ раскладывают на сумму простейших дробей и интегрируют каждое слагаемое отдельно

2. Методика решения типовых задач

2.1 Пример1. Найти интеграл $\int \frac{5-4x}{x^2-x-2}dx$.

Разложим знаменатель подынтегральной, рациональной правильной дроби на множители, получим

$$\int \frac{5-4x}{x^2-x-2}dx = \int \frac{5-4x}{(x+1)(x-2)}dx.$$

Линейным множителям знаменателя данной дроби отвечают соответственно дроби

$$\frac{A}{x+1} \text{ и } \frac{B}{x-2}.$$

Следовательно,

$$\frac{5-4x}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}.$$

Умножим обе части полученного равенства на общий знаменатель, получим

$$5-4x = A(x-2) + B(x-1).$$

В правой части равенства раскроем скобки и соберём коэффициенты при различных степенях переменной x:

$$5-4x = (A+B)x + (B-2A).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства, получим линейную систему для нахождения неопределённых коэффициентов A и B:

$$\begin{cases} A + B = -4, \\ -2A + B = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -3, \\ B = -1 \end{cases}$$

Следовательно,

$$\frac{5-4x}{(x+1)(x-2)} = -\frac{3}{x+1} - \frac{1}{x-2},$$

и исходный интеграл равен

$$\int \frac{5-4x}{x^2 - x - 2}\,dx = -3\int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{x-2} = -3\ln|x+1| - \ln|x-2| + C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{x^2+6}{x^3 - 6x^2 + 9x}\,dx$.

Решение. Разложим знаменатель подынтегральной дроби на множители:

$$x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)^2.$$

Линейному множителю x в разложении знаменателя отвечает дробь $\frac{A}{x}$, множителю $(x-3)^2$ - сумма простейших дробей $\frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}$.

Следовательно, разложение подынтегральной дроби на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{x^2+6}{x(x-3)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}.$$

Умножив обе части полученного равенства на общий знаменатель, получим

$$x^2 + 6 = A(x-3)^2 + Bx(x-3) + Cx.$$

Раскрыв скобки в правой части полученного равенства и собрав коэффициенты при различных степенях переменной x, получим

$$x^2 + 6 = (A+B)x^2 + (-6A - 3B + C)x + 9A,$$

откуда получаем систему линейных уравнений для определения коэффициентов A, B, C:

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ -6A - 3B + C = 0, \\ 9A = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{2}{3}, \\ B = \frac{1}{3}, \\ C = 5 \end{cases}$$

Следовательно, разложение подынтегральной дроби на простейшие имеет вид

$$\frac{x^2+6}{x(x-3)^2}=\frac{2}{3x}+\frac{1}{3(x-3)}+\frac{5}{(x-3)^2},$$

и данный интеграл равен

$$\int\frac{x^2+6}{x^3-6x^2+9x}dx=\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-3}+5\int\frac{dx}{(x-3)^2}=$$

$$=\frac{2}{3}\ln|x|+\frac{1}{3}\ln|x-3|-\frac{5}{x-3}+C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int\frac{x^2-6x-18}{(x-2)(x^2+2x+5)}dx$.

Решение. Разложим подынтегральную дробь на сумму простейших дробей. Знаменатель подынтегральной дроби есть произведение линейного множителя $x-2$ и квадратичного множителя x^2+2x+5, не имеющего действительных корней.

Первому множителю отвечает дробь вида $\frac{A}{x-2}$, а второму - дробь вида $\frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$.

Поэтому разложение подынтегральной дроби на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{x^2-6x-18}{(x-2)(x^2+2x+5)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+5}.$$

Умножим обе части полученного равенства на общий знаменатель, получим

$$x^2-6x-18=A(x^2+2x+5)+(Bx+C)(x-2).$$

Раскрыв скобки в полученном выражении, и собрав коэффициенты при различных степенях переменной x, получаем систему для определения коэффициентов A,B,C:

$$\begin{cases}A+B=1,\\2A-2B+C=-6,\\5A-2C=-18\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-2,\\B=3,\\C=4\end{cases}$$

Следовательно,

$$\int\frac{x^2-6x-18}{(x-2)(x^2+2x+5)}dx=-2\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{3x+4}{x^2+2x+5}dx=$$

$$=-2\ln|x-2|+\int\frac{\frac{3}{2}(2x+2)+1}{x^2+2x+5}dx=-2\ln|x-2|+\frac{3}{2}\ln\left(x^2+2x+5\right)+$$

$$+\int\frac{dx}{(x+1)^2+4}=-2\ln|x-2|+\frac{3}{2}\left(x^2+2x+5\right)+\frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2}+C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int\frac{x^3+x}{\left(x^2+2x+2\right)^2}dx$.

Решение. Квадратный трёхчлен x^2+2x+2 не имеет действительных корней и стоит в знаменателе во второй степени, поэтому подынтегральная дробь раскладывается на простейшие дроби следующим образом:

$$\frac{x^3+x}{\left(x^2+2x+2\right)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+2}+\frac{Cx+D}{\left(x^2+2x+2\right)^2}.$$

Освобождаясь в полученном равенстве от знаменателей, получим

$$x^3+x=(Ax+B)\left(x^2+2x+2\right)+Cx+D.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x в левой и правой частях последнего равенства, получаем систему

$$\begin{cases}A=1,\\2A+B=0,\\2A+2B+C=1,\\2B+D=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1,\\B=-2,\\C=3,\\D=4\end{cases}$$

и, следовательно,

$$\int\frac{x^3+x}{\left(x^2+2x+2\right)^2}dx=\int\frac{x-2}{x^2+2x+2}dx+\int\frac{3x+4}{\left(x^2+2x+2\right)^2}dx=$$

$$=\int\frac{\frac{1}{2}(2x+2)-3}{(x+1)^2+1}dx+\int\frac{\frac{3}{2}(2x+2)+1}{\left(x^2+2x+2\right)^2}dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+x\right)-$$

$$-3arctg(x+1)-\frac{3}{2\left(x^2+2x+2\right)}+\int\frac{dx}{\left(x^2+2x+2\right)^2}.$$

Для нахождения последнего интеграла преобразуем подынтегральную функцию

$$\frac{1}{\left(x^2+2x+2\right)^2}=\frac{1}{\left[\left(x+1\right)^2+1\right]^2}$$

и применим подстановку $t=x+1$, тогда

$$\int\frac{dx}{\left[\left(x+1\right)^2+1\right]^2}=\int\frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2}=\int\frac{\left(t^2+1\right)-t^2}{\left(t^2+1\right)^2}dt=\int\frac{dt}{t^2+1}-\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+1\right)^2}=$$

$$=arctgt-\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+1\right)^2}.$$

Интеграл $\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+1\right)^2}$ найдём интегрированием по частям, полагая

$$u=t\Rightarrow du=dt,$$

$$dv=\frac{tdt}{\left(t^2+1\right)^2}\Rightarrow v=\int\frac{tdt}{\left(t^2+1\right)^2}=\int\frac{d\left(t^2+1\right)}{\left(t^2+1\right)^2}=-\frac{1}{2\left(t^2+1\right)}.$$

Отсюда получаем

$$\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+1\right)^2}=-\frac{t}{2\left(t^2+1\right)}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=-\frac{t}{2\left(t^2+1\right)}+\frac{1}{2}arctgt+C.$$

Таким образом,

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+2x+2\right)^2}=arctgt+\frac{t}{2\left(t^2+1\right)}-\frac{1}{2}arctgt+C=$$

$$=\frac{1}{2}arctg\left(x+1\right)+\frac{x+1}{2\left(x^2+2x+2\right)}+C.$$

Получили, что исходный интеграл равен

$$\int\frac{x^3+x}{\left(x^2+2x+2\right)^2}dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right)-\frac{5}{2}arctg\left(x+1\right)+\frac{x-2}{2\left(x^2+2x+2\right)}+C.$$

Пример 5. Найти интеграл $\int\frac{x^4-16x^3+5x+8}{x^3-16x}dx$.

Решение. Данная подынтегральная, рациональная дробь является неправильной, поэтому выделим целую часть, выполнив деление «уголком», получим:

$$\frac{x^4-16x^3+5x+8}{x^3-16x}=x-16+\frac{16x^2-251x+8}{x^3-16x}.$$

Разложим знаменатель полученной дроби на простейшие множители

$$x^3-16x=x(x-4)(x+4).$$

Линейным множителям знаменателя отвечают дроби $\frac{A}{x}, \frac{B}{x-4}, \frac{C}{x+4}$, поэтому

$$\frac{16x^2-251x+8}{x(x-4)(x+4)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-4}+\frac{C}{x+4}.$$

Умножим обе части полученного равенства на наименьший общий знаменатель, получим

$$16x^2-251x+8=A(x-4)(x+4)+Bx(x+4)+Cx(x-4).$$

Уравняв коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, получим систему для их определения:

$$\begin{cases} A+B+C=16, \\ 4B-4C=251, \\ -16A=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{2}, \\ B=-\frac{185}{8}, \\ C=\frac{317}{8} \end{cases}$$

Таким образом, исходный интеграл равен

$$\int\frac{x^4-16x^3+5x+8}{x^3-16x}dx=\int(x-16-\frac{1}{2x}-\frac{185}{8(x-4)}+\frac{317}{8(x+4)})dx=$$

$$=\int xdx-16\int dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}-\frac{185}{8}\int\frac{dx}{x-4}+\frac{317}{8}\int\frac{dx}{x+4}=$$

$$=\frac{x^2}{2}-16x-\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{185}{8}\ln|x-4|+\frac{317}{8}\ln|x+4|+C.$$

4. Порядок выполнения практической работы

4.1 Изучить краткие теоретические сведения.
4.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
4.3 Ответить на контрольные вопросы

5. Содержание отчёта

5.1 Тема и цель работы.
5.2 Решение заданий.

5.3 Ответы на контрольные вопросы.

6.Контрольные вопросы

6.1 Что называется рациональной дробью?
6.2 Какие простейшие дроби вы знаете?
6.3 В чем состоит метод неопределенных коэффициентов?

7.Список справочной литературы

7.1 Дадаян А.А. Математика: Учебник для СПО.- М.: Инфра-М, 2019.- 544с.
7.2Дадаян А.А. Сборник задач по математике: Учебное пособие для СПО / А.А. Дадаян.- М.: Форум, 2018.- 352с.
7.3 Конспект теоретических занятий.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВАРИАНТ 1	ВАРИАНТ 2
Найти неопределённые интегралы: **1.** $\int \frac{(5x+2)dx}{x^2+2x+10}$ **2.** $\int \frac{dx}{x^2-4x+13}$ **3.** $\int \frac{(3-x)dx}{(x+5)(x-4)}$ **4.** $\int \frac{(2x^5-4x^3-12x^2+3x+34)dx}{x^3-8}$	**Найти неопределённые интегралы:** **1.** $\int \frac{(6x-1)dx}{x^2-4x+13}$ **2.** $\int \frac{dx}{x^2+6x+18}$ **3.** $\int \frac{(x+4)dx}{(x+3)(x-2)}$ **4.** $\int \frac{(5x^4-x^3+4x^2+8)dx}{x^3-8}$
ВАРИАНТ №3	**ВАРИАНТ №4**
Найти неопределённые интегралы: **1.** $\int \frac{(6x-7)dx}{x^2+4x+8}$ **2.** $\int \frac{dx}{x^2+2x+17}$ **3.** $\int \frac{(3x-1)dx}{(2x+5)(x+4)}$ **4.** $\int \frac{(x^5-6x^4+12x^2-54x+8)dx}{x^3+8}$	**Найти неопределённые интегралы:** **1.** $\int \frac{(6x+1)dx}{x^2-8x+25}$ **2.** $\int \frac{dx}{x^2-12x+40}$ **3.** $\int \frac{(2-3x)dx}{(x-1)(3x-4)}$ **4.** $\int \frac{(3x^5-2x^3+27x^2-x-18)dx}{x^3+8}$

Практическое занятие №13

Тема: Вычисление определенных интегралов по формуле Ньютона-Лейбница, методом замены и по частям. Вычисление площадей плоских фигур и объемов тел вращения.

1. **Цель работы:** получить практические навыки вычисленияопределенных интегралов по формуле Ньютона-Лейбница, методом замены и по частям, а так же вычисления площадей плоских фигур и объемов тел вращения.
2. **Краткие теоретические сведения**

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная функция $y = f(x) \geq 0$.

Фигура, ограниченная графиком функции $y = f(x)$, прямыми линиями, $y = 0,\ x = a,\ x = b$ называется ***криволинейной трапецией***.

Определение. *Предел интегральной суммы* $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ *при* $n \to \infty$ *называется* ***определённым интегралом****от функции* $y = f(x)$ *и обозначается* $\int_a^b f(x)dx$, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

a - нижний предел интегрирования,

b - верхний предел интегрирования,

$f(x)$ - подынтегральная функция,

$f(x)dx$ - подынтегральное выражение;

$[a;b]$ - отрезок интегрирования.

Из определения определённого интеграла вытекает его геометрический смысл: *определённый интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции.*

Свойства определённого интеграла.

Определённый интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определённых интегралов от каждого слагаемого.

$$\int_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x) \right) dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$$

Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла.

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

При перестановке местами пределов интегрирования определённый интеграл меняет свой знак на противоположный.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Определённый интеграл с одинаковыми пределами равен нулю.

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Отрезок интегрирования можно разбивать на части.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

где $a \prec c \prec b$.

Формула Ньютона - Лейбница. Основные методы вычисления определённого интеграла.

Вычисляют определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$ по ***формуле Ньютона - Лейбница:***

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$**у**

где $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$.

Формула Ньютона - Лейбница применяется для вычисления определённого интеграла во всех случаях, когда может быть найдена первообразная функция $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$.

Для вычисления определённого интеграла от функции $f(x)$ по формуле Ньютона - Лейбница необходимо сначала найти первообразную $F(x)$, поэтому для вычисления определённого интеграла применяют те же приёмы, что и для нахождения неопределённого интеграла.

Замена переменной в определённом интеграле.

При вычислении определённого интеграла $\int_a^b f(x)dx$ способом *замены переменной* данный интеграл с помощью подстановки $x=\varphi(t)$ или $t=\psi(x)$ преобразуется в другой определённый интеграл с новой переменной интегрирования t и являющийся табличным.

При этом старые пределы интегрирования $x_1=a$ и $x_2=b$ заменяются новыми пределы $t_1=\psi(a), \quad t_2=\psi(b)$.

Формула замены переменной в определённом интеграле выглядит следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{t_1}^{t_2} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

В данной формуле предполагается, что функции $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[t_1;t_2]$, а функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на отрезке $[t_1;t_2]$.

Замечание. В отличие от интегрирования методом замены переменной в неопределённом интеграле при таком же способе интегрирования в интеграле определённом к старой переменной интегрирования не возвращаются.

Интегрирование по частям в определённом интеграле.

Теорема. *Если функции* $u=u(x)$ *и* $v=v(x)$ *имеют непрерывные производные на отрезке* $[a;b]$*, то имеет место формула интегрирования по частям в определённом интеграле*

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Замечание 1. При вычислении определённого интеграла по частям используются те же рекомендации при выборе функции u и выражения dv, что и при применении данного метода для неопределённого интеграла.

Замечание 2. При вычислении определённого интеграла по частям пределы интегрирования не пересчитываются.

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой y=f(x), двумя прямыми x=a и x=b и отрезкомa≤x≤bоси абсцисс, вычисляется по формуле:

$S = \int_a^b f(x)dx,$, если f(x)≥0 на отрезке от aдоb.

$S = -\int_a^b f(x)dx$, если f(x)≤0 на отрезке от aдоb.

$S = \int_a^b |f(x)|dx$,если f(x)конечное число раз меняет знак на отрезке от aдоb.

$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$, если площадь фигуры, ограничена двумя непрерывными кривыми y=f(x) и y=g(x) и двумя прямыми x=a и x=b, где f(x) ≥ g(x)на отрезке от aдоb.

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Охкриволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой y=f(x), осью абсцисс и двумя прямыми x=a и x=b (a‹b), находится по формуле: $V_x = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx,$

аналогично, **объем тела вращения вокруг оси Оу**криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой x=φ(y), осью ординат и двумя прямымиy=d и y=d (c‹d), находится по формуле:$V_y = \pi\int_c^d [\varphi(y)]^2 dy,$

2. Методика решения типовых задач

2.1 Непосредственное интегрирование.

Пример 1. Вычислить определённый интеграл $\int_1^2 5x^4 dx$.

Решение. Применяя свойство 2 определённого интеграла, табличный интеграл 1 и формулу Ньютона - Лейбница, имеем:

$$\int_1^2 5x^4dx = 5\int_1^2 x^4dx = 5\cdot\frac{x^5}{5}\Bigg|_1^2 = x^5\Big|_1^2 = 2^5 - 1^5 = 32 - 1 = 31.$$

Пример 2. Вычислить $\int_0^4\left(3x - e^{\frac{x}{4}}\right)dx$.

Решение. Последовательно применим свойства 1 и 2 определённого интеграла, табличный интеграл и формулу Ньютона - Лейбница, получим:

$$\int_0^4\left(3x - e^{\frac{x}{4}}\right)dx = 3\int_0^4 xdx - \int_0^4 e^{\frac{x}{4}}dx = \frac{3x^2}{2}\Bigg|_0^4 - 4e^{\frac{x}{4}}\Bigg|_0^4 = \frac{3\cdot 4^2}{2} - 4\cdot e^{\frac{4}{4}} + 4e^{\frac{0}{4}} = 28 - 4e$$

Пример 3. Вычислить $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1 - x\sin x}{x}dx$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию, разделив почленно числитель на знаменатель, применим свойство определённого интеграла 1 и табличные интегралы, получим

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1 - x\sin x}{x}dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{x} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin xdx = \ln x\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \cos x\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \ln\pi - \ln\frac{\pi}{2} +$$

$$\cos\pi - \cos\frac{\pi}{2} = \ln 2 - 1$$

a. *Замена переменного*:

Пример 4. Вычислить $\int_0^5\frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$.

Решение. Сделаем замену $t = \sqrt{1+3x} \Rightarrow x = \frac{t^2 - 1}{3}, \quad dx = \frac{2t}{3}dt$.

Пересчитаем пределы интегрирования:

$$t_1 = \sqrt{1 + 3\cdot 0} = 1, \quad t_2 = \sqrt{1 + 3\cdot 5} = 4,$$

получаем

$$\int_0^5\frac{xdx}{\sqrt{1+3x}} = \int_1^4\frac{\frac{t^2-1}{3}\cdot\frac{2t}{3}dt}{t} = \frac{2}{9}\int_1^4\left(t^2 - 1\right)dt = \frac{2}{9}\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Bigg|_1^4 = \frac{2}{9}\left(\frac{4^3}{3} - 4\right) -$$

$$\frac{2}{9}\left(\frac{1^3}{3}-1\right)=\frac{2}{9}\cdot\frac{52}{3}+\frac{4}{27}=\frac{108}{27}=4.$$

Пример 5. Вычислить $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{1+tgx}}{\cos^2 x}dx$.

Решение. Сделаем замену $t=1+tgx\Rightarrow dt=\left(1+tgx\right)'dx=\frac{dx}{\cos^2 x}$ и найдём новые пределы интегрирования

$$t_1=1+tg\left(-\frac{\pi}{4}\right)=1-1=0,\quad t_2=1+tg\frac{\pi}{4}=1+1=2,$$

тогда получим

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{1+tgx}}{\cos^2 x}dx=\int\limits_0^2\sqrt{t}dt=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2=\frac{2}{3}\sqrt{2^3}-0=\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

b. *Интегрирование по частям:*

Пример 8. Вычислить $\int\limits_1^e x\ln xdx$.

Решение. Данный интеграл относится ко второй группе, поэтому положим

$u=\ln x\Rightarrow du=\frac{dx}{x},\quad dv=xdx\Rightarrow v=\frac{x^2}{2}$, тогда имеем:

$$\int\limits_1^e x\ln xdx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{2}\int\limits_1^e x^2\cdot\frac{dx}{x}=\frac{e^2}{2}\ln e-\frac{1}{2}\ln 1-\frac{1}{2}\int\limits_1^e xdx=\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big|_1^e=$$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\left(e^2+1\right).$$

Пример 9. Вычислить $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\left(2-x\right)\sin 3xdx$.

Решение. Данный интеграл относится к первой группе интегралов, поэтому примем

$u=2-x\Rightarrow du=-dx,\quad dv=\sin 3xdx\Rightarrow v=-\frac{1}{3}\cos 3x$, тогда получим:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2-x)\sin 3x dx = -\frac{1}{3}(2-x)\cos 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos 3x dx = -\frac{1}{3}\left(2-\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{2} +$$

$$\frac{1}{3}(2-0)\cos 0 - \frac{1}{9}\sin 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = 0 + \frac{2}{3} - \frac{1}{9}\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{9}\sin 0 = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}.$$

2.4 Пример 10. *Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями*

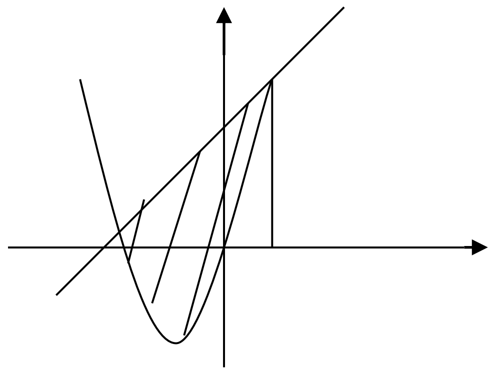
$y = x^2 + 4x$

$y = x + 4$

Решение.

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x \\ y = x + 4 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -4, x_2 = 1$$

$$S = \int_{-4}^{1}(x+4-x^2-4x)dx = \int_{-4}^{1}(4-3x-x^2)dx = 4x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-4}^{1} = \left(4-\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right) - \left(-16-\frac{48}{2}+\frac{64}{3}\right) = \frac{125}{6}$$



2.5 Пример 11. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $y = \frac{4}{x}$, прямыми x=3, x=12 и осью абсцисс.

Решение. Пользуясь формулой для вычисления объема, находим

$$V_x = \pi\int_3^{12}\left[\frac{4}{x}\right]^2 dx = 16\pi\int_3^{12}\frac{dx}{x^2} = -16\pi\frac{1}{x}\Big|_3^{12} = -16\pi\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{3}\right) = 4\pi \text{ (куб.ед.)}$$

4. Порядок выполнения практической работы

4.1 Изучить краткие теоретические сведения.
4.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
4.3 Ответить на контрольные вопросы

5. Содержание отчёта

5.1 Тема и цель работы.
5.2 Решение заданий.
5.3 Ответы на контрольные вопросы.

6.Контрольные вопросы

6.1 Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
6.2 Запишите формулу для вычисления площади плоской фигуры при помощи определенного интеграла.
6.3 Запишите формулу для вычисления объема тела вращения.

7. Список справочной литературы

7.1 Дадаян А.А. Математика: Учебник для СПО.- М.: Инфра-М, 2019.- 544с.
7.2 Дадаян А.А. Сборник задач по математике: Учебное пособие для СПО / А.А. Дадаян.- М.: Форум, 2018.- 352с.
7.3 Конспект теоретических занятий.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВАРИАНТ №1	ВАРИАНТ №2
№1. Вычислить интегралы: $а)\int\limits_{-1}^{1}(6x^2-2x-5)dx$ $б)\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{3\sin x+1}\cos xdx$ $в)\int\limits_{1}^{e}x^3\ln xdx$ №2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. $y=2x^2$, $y=3x+2$. Сделать чертеж. №3. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=\sqrt{x-2}$, прямыми x=2, x=4и осью абсцисс. Сделать чертеж.	№1. Вычислить интегралы: $а)\int\limits_{1}^{9}\frac{x-1}{\sqrt{x}}dx$ $б)\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin xdx}{3-\cos x}$ $в)\int\limits_{0}^{5}xe^{x}dx$ №2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. $y=-x^2-2$, $y=-4x+1$. Сделать чертеж. №3. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=\frac{3}{x}$, прямыми x=3, x=6 и осью абсцисс. Сделать чертеж.
ВАРИАНТ №3	**ВАРИАНТ №4**
№1. Вычислить интегралы: $а)\int\limits_{-1}^{1}(2x-3x^2)dx$ $б)\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos xdx}{2+\sin x}$ $в)\int\limits_{1}^{e^2}\sqrt{x}\ln xdx$ №2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. $y=x^2-5x$, $y=x-5$. Сделать чертеж. №3. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=-\frac{2}{x}$, прямыми x=1, x=2 и осью абсцисс. Сделать чертеж.	№1. Вычислить интегралы: $а)\int\limits_{1}^{4}(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})dx$ $б)\int\limits_{0}^{1}(e^{x}-4)^{4}e^{x}dx$ $в)\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\sin xdx$ №2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. $y=x^2+6$, $y=-6x+1$. Сделать чертеж. №3.Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох криволинейной трапеции, ограниченной прямой $y=3x-1$, прямыми x=1, x=3и осью абсцисс. Сделать чертеж.

Практическое занятие №14

Тема: Вычисление частных производных, нахождение полного дифференциала. Вычисление приближенного значения функции.

1. **Цель работы:** получить практические навыки вычислениячастных производных, полного дифференциала функций двух переменных, изучение применения его в приближенных вычислениях.
2. **Время выполнения работы:** 2 академических часа.
3. **Краткие теоретические сведения:**

Пусть D - некоторое множество точек плоскости XOY. Правило f, по которому каждой паре чисел $(x;y)\in D$ставится в соответствие ровно одно действительное число $z\in Z$, называется **функцией двух переменных** и обозначается

$$z=z(x;y) \text{ или } z=f(x;y).$$

Множество D называется ***областью определения*** функции z, множество Z называется ***областью значений*** функции z.

Геометрически область определения функции двух переменных представляет собой либо часть координатной плоскости xoy, ограниченную замкнутой кривой, причём точки этой кривой (границы области) могут принадлежать или не принадлежать области определения, либо саму плоскость xoy, либо совокупность нескольких частей плоскости xoy.

Геометрическим изображением (***графиком***) функции двух переменных $z=z(x;y)$ в прямоугольной системе координат (графиком функции) является некоторая поверхность в пространстве, где x и y являются соответственно абсциссой и ординатой переменной точки этой поверхности, а z - её аппликатой.

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Частным приращением функции двух переменных по переменной x (Δz_x) называется разность

$$\Delta z_x = z(x+\Delta x;y)-z(x;y)$$

Частным приращением функции двух переменных по переменной y (Δz_y) называется разность

$$\Delta z_y = z(x;y+\Delta y)-z(x;y).$$

Частной производной функции $z=z(x;y)$ первого порядка *по аргументу* x называется предел отношения частного приращения функции Δz_x к приращению аргумента Δx при стремлении последнего к нулю.

Обозначения частной производной по переменной x:

$$z'_x, \quad \frac{\partial z}{\partial x}.$$

По определению

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z_x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(x+\Delta x; y) - z(x; y)}{\Delta x}$$

Частной производной функции $z = z(x; y)$ первого порядка *по аргументу* y называется предел отношения частного приращения функции Δz_y к приращению аргумента Δy при стремлении последнего к нулю.

Обозначения частной производной по переменной y:

$$z'_y, \quad \frac{\partial z}{\partial y}.$$

По определению

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z_y}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{z(x; y+\Delta y) - z(x; y)}{\Delta y}.$$

Из определения частных производных ясно: чтобы найти частную производную по одному из аргументов, второй аргумент нужно считать постоянным. Поэтому для нахождения частных производных применяют правила дифференцирования и таблицу производных функции одной переменной.

Полным дифференциалом дифференцируемой функции $z = z(x; y)$ в некоторой точке $M(x; y)$ называется выражение вида:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

С помощью полного дифференциала можно производить *приближённые вычисления функции* двух переменных по следующей формуле:

$$z(x+\Delta x; y+\Delta y) \approx z(x; y) + \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

2. Методика решения типовых задач

2.1 Пример 1.

Найти частные производные функции $z = x^2 - 3xy - 4y^2 - x + 2y + 2$.

Решение.

Найдём частную производную функции по переменной x, при этом переменная y считается величиной постоянной:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 3y - 1.$$

Аналогичным образом находим частную производную по переменной y, считая постоянной величину x:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3x - 8y + 2.$$

Пример 2.

Найти частные производные функции $z = \arcsin\frac{y}{x}$.

Решение.

При нахождении частных производных данной функции применяем правило дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}} = -\frac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

2.2Пример 3.

Найти полный дифференциал функции $z = arctg\,\frac{x}{y}$.

Решение.

Найдём частные производные данной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{y\left(1+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_y = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Подставим найденные частные производные в формулу полного дифференциала, получим:

$$dz = \frac{1}{y\left(1+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right)}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

Пример 4.

Найти полный дифференциал функции $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ в точке $(1;-1)$.

Решение.

Преобразуем данную функцию к виду удобному для дифференцирования:

$$z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Найдём частные производные функции и вычислим их значения в указанной точке:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(x^2+y^2\right)'_x=-\frac{2x}{2\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}=-\frac{x}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}},$$

$$z'_x(1;-1)=-\frac{1}{\sqrt{(1+1)^3}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(x^2+y^2\right)'_y=-\frac{2y}{2\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}=-\frac{y}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}},$$

$$z'_н(1;-1)=-\frac{-1}{\sqrt{(1+1)^3}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Подставим найденные значения частных производных в точке $(1;-1)$ в формулу полного дифференциала, получим:

$$dz=-\frac{\sqrt{2}}{4}dx+\frac{\sqrt{2}}{4}dy.$$

2.3 Пример 5.

Вычислить приближённо $(0{,}98)^{2{,}01}$.

Решение.

Рассмотрим функцию $z=x^y$. Для удобства вычисления с помощью полного дифференциала заданное выражение представим в виде

$$(0{,}98)^{2{,}01}=(1-0{,}02)^{2+0{,}01}.$$

Тогда $x=1,\quad y=2,\quad dx=-0{,}02,\quad dy=0{,}01.$

Найдём частные производные функции $z=x^y$ и вычислим их значения в точке $(1;2)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1},\quad z'_x(1;2)=2\cdot1^{2-1}=2.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x,\quad z'_y(1;2)=1^2\cdot\ln1=0.$$

Подставим все найденные значения в формулу приближённых вычислений с помощью полного дифференциала, получим:

$$(0{,}98)^{2{,}01} = z(0{,}98;2{,}01) = (1-0{,}02)^{2+0{,}01} \approx z(1;2) + z'_x(1;2)\Delta x + z'_y(1;2)\Delta y =$$
$$= 1 + 2\cdot(-0{,}02) + 0\cdot 0{,}01 = 0{,}96$$

4. Порядок выполнения практической работы

4.1 Изучить краткие теоретические сведения.
4.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
4.3 Ответить на контрольные вопросы

5. Содержание отчёта

5.1 Тема и цель работы.
5.2 Решение заданий.
5.3 Ответы на контрольные вопросы.

6.Контрольные вопросы

6.1 Дайте определение функции двух переменных.
6.2 Запишите формулу частного приращения функции двух переменных по переменной x, по переменной y.
6.3 Дайте определение частных производных функции двух переменных первого порядка, запишите соответствующие формулы.
6.4 Как вычисляется полный дифференциал функции двух переменных?
6.5 Как выполнить приближенные вычисления?

7. Список справочной литературы

7.1 Алексеева Е.В. Дифференциальное исчисление функции двух переменных: учебное пособие для студентов 1-го и 2-го курса технических специальностей по разделу дисциплины «Математика»
7.2 Конспект теоретических занятий

ПРИЛОЖЕНИЕ

<table>
<tr><th>ВАРИАНТ №1</th><th>ВАРИАНТ №2</th></tr>
<tr><td>№1. Найти частные производные функции:
а) $z = x^4 - 5y^3 + 2xy - xy^2$
б) $z = e^{x+3y-xy}$.

№2. Найти полный дифференциал функции $z = x^2 + 2y^2 - 5$ в точке $(2;-1)$.

№3. Вычислить приближённо:
а) $(1{,}02)^{4{,}05}$
б) $\sqrt{2{,}01^4 + 2{,}95^2}$</td><td>№1. Найти частные производные функции:
а) $z = 3xy^2 + 6x - 2y^3 - 7x^2 y$.
б) $z = \ln(3x - 2y + 4xy)$.

№2. Найти полный дифференциал функции $z = x^3 y - 3x^4 + 2xy^3$ в точке $(1;1)$.

№3. Вычислить приближённо:
а) $(1{,}04)^{2{,}03}$
б) $\sqrt{8{,}04^2 + 6{,}03^2}$</td></tr>
<tr><th>ВАРИАНТ №3</th><th>ВАРИАНТ №4</th></tr>
<tr><td>№1. Найти частные производные функции:
а) $z = 5x^3 y - y^5 + 4x^2 + 7$.
б) $z = \sin(x^2 - xy)$.
№2. Найти полный дифференциал функции $z = x^3 + \cos x + x^4 y^2 + y^4 + 8$ в точке $(0;-2)$.

№3. Вычислить приближённо:
а) $(2{,}03)^{2.08}$
б) $\sqrt{1{,}02^3 + 1{,}97^3}$</td><td>№1. Найти частные производные функции:
а) $z = -3y^2 + 2x - 7xy^4 - 6$.
б) $z = 6^{3x+2xy^3}$.
№2. Найти полный дифференциал функции $z = x^2 y - 2y^3 + \ln x - 6$ в точке $(1;-2)$.

№3.Вычислить приближённо:
а) $(1{,}07)^{3{,}97}$
б) $\sqrt{3{,}03^2 + 4{,}05^2}$</td></tr>
</table>

Практическое занятие №15

Тема: Нахождение экстремумов функции двух переменных.

1. **Цель работы:** получить практические навыки вычисленияэкстремума функции двух переменных.
2. **Время выполнения работы:** 2 академических часа.
3. **Краткие теоретические сведения:**

Частными производными второго порядка функции $z = z(x; y)$ называются частные производные от частных производных первого порядка.

Обозначения:

$z''_{xx} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$ - частная производная второго порядка по переменной x.

$z''_{yy} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$ - частная производная второго порядка по переменной y.

$z''_{xy} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$ - смешанная производная второго порядка.

$z''_{yx} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$ - смешанная производная второго порядка.

Смешанные производные второго порядка в случае их непрерывности равны между собой, т.е.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Точка M_0 называется ***точкой максимума*** функции $z = z(x; y)$, если для любых точек M из окрестности точки M_0 выполняется следующее условие:

$$z(P_0) \succ z(P).$$

Точка M_0 называется ***точкой минимума*** функции $z = z(x; y)$, если для любых точек M из окрестности точки M_0 выполняется следующее условие:

$$z(P_0) \prec z(P).$$

Точки максимума и минимума функции двух переменных называются ***точками экстремума*** функции, а значения функции в точках максимума и минимума называются ***максимумом*** и ***минимумом*** функции или ***экстремумами*** функции.

Необходимое условие существования точек экстремума функции двух переменных:

для того, чтобы точка $M_0(x_x; y_0)$ была точкой экстремума, необходимо, чтобы она была ***критической*** точкой функции (т.е. частные производные первого порядка в этой точке обращались в ноль).

Правило нахождения экстремумов функции двух переменных:

1. Найти критические точки M_0 функции, т.е. найти частные производные первого порядка и решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}.$$

2. Найти частные производные второго порядка и вычислить их значения в критических точках M_0.
3. Составить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} z''_{xx}(M_0) & z''_{xy}(M_0) \\ z''_{xy}(M_0) & z''_{yy}(M_0) \end{vmatrix}.$$

1) Если $\Delta \succ 0$, то точка M_0 - точка экстремума функции (а именно: если $z''_{xx} \succ 0$, то M_0 - точка минимума, если $z''_{xx} \prec 0$, то M_0 - точка максимума).

2) Если $\Delta \prec 0$, то в точке M_0 экстремума нет.

3) Если $\Delta = 0$, то требуется дополнительное исследование.

2.Методика решения типовых задач

2.1 Пример1.

Найти экстремумы функции $z = x^3 + y^3 - 9xy$.

Решение.

Найдём частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 9y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 9x.$$

Для нахождения критических точек составим систему уравнений и решим её:

$$\begin{cases} 3x^2 - 9y = 0, \\ 3y^2 - 9x = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^2}{3}, \\ x^4 - 27x = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 3 \end{cases} \end{array} \right. .$$

Найдём производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -9.$$

Вычислим значения производных второго порядка в точке $(0;0)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Составим определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 0 \end{vmatrix} = -81 \prec 0.$$

Т.к. $\Delta \prec 0$, то в точке $(0;0)$ экстремума нет.

Вычислим значение производных второго порядка в точке $(3;3)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 18, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 18.$$

Составим определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{vmatrix} = 324 - 81 = 243 \succ 0.$$

Т.к. $\Delta \succ 0$, то точка $(3;3)$ - точка экстремума, т.к. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 18 \succ 0$, то точка $(3;3)$ является точкой минимума.

Подставив точку минимума в уравнение функции, найдём минимум функции:

$z(3;3) = 3^3 + 3^3 - 3 \cdot 3 \cdot 3 = -27.$

4.Порядок выполнения практической работы

4.1 Изучить краткие теоретические сведения.
4.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
4.3 Ответить на контрольные вопросы

5. Содержание отчёта

5.1 Тема и цель работы.
5.2 Решение заданий.
5.3 Ответы на контрольные вопросы.

6.Контрольные вопросы:

6.1Дайте определение частных производных второго порядка функции двух переменных.

6.2Какие точки называются критическими для функции двух переменных?

6.3Сформулируйте определение точки максимума и точки минимума функции двух переменных.
6.4Что такое экстремумы функции двух переменных?
6.5Сформулируйте необходимое условие существования точек экстремума.
6.6 Сформулируйте правило исследования на экстремум функции двух переменных.

7.Список справочной литературы

7.1Алексеева Е.В. Дифференциальное исчисление функции двух переменных: учебное пособие для студентов 1-го и 2-го курса технических специальностей по разделу дисциплины «Математика»
7.2Конспект теоретических занятий.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВАРИАНТ №1	ВАРИАНТ №2
№1. Найти частные производные второго порядка: а) $z = e^x \cdot \cos y$ б) $z = arctg\,\frac{x+y}{x}$ №2. Исследовать функцию на экстремум: а) $z = x^2 + y^2 - 8x - 2$ б) $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$	№1. Найти частные производные второго порядка: а) $z = \sin x \cdot \cos y$ б) $z = \ln\frac{x+y}{y}$ №2. Исследовать функцию на экстремум: а) $z = 3x^2 - y^2 + 4y + 5$ б) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$
ВАРИАНТ №3	**ВАРИАНТ №4**
№1. Найти частные производные второго порядка: а) $z = \sin x \cdot \ln y$ б) $z = \sin\frac{x}{y^2}$ №2. Исследовать функцию на экстремум: а) $z = x^2 + xy + 2y^2 - x + y$ б) $z = x^2 + 2xy + 2y^2 + 4y$	№1. Найти частные производные второго порядка: а) $z = e^y \cdot \ln x$ б) $z = tg\,\frac{y^3}{x}$ №2. Исследовать функцию на экстремум: а) $z = -x^2 - xy - y^2 + 3x + 6y$ б) $z = -x^2 + xy - y^2 + 2x - y + 3$

Практическое занятие №16

Тема: Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными, однородных дифференциальных уравнений первого порядка.

1. **Цель работы:** получить практические навыки решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными и однородных дифференциальных уравнений первого порядка.
2. **Время выполнения работы:** 2 академических часа.
3. **Краткие теоретические сведения:**

Дифференциальные уравнения, основные понятия и определения. Задача Коши.

Определение 1.
Дифференциальным называется уравнение, связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию $y(x)$ и производные неизвестной функции $y', y'', y'''...y^{(n)}$ (или дифференциалы неизвестной функции $dy, d^2y, d^3y...d^{(n)}y$) различных порядков.

Дифференциальное уравнение относительно функции одной независимой переменной называется ***обыкновенным дифференциальным уравнением.***

Дифференциальное уравнение относительно функции двух или более переменных называется ***дифференциальным уравнением в частных производных.***

$$2x + y - 3y' = 0, \quad xydx = (2x+1)dy, \quad y'' = 2x.$$

Определение 2.
Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной (дифференциала), входящей в это уравнение.

Например, $xy' + y - 2 = 0$- уравнение первого порядка, $d^2y = (x^2-1)dx^2$- уравнение второго порядка, $y''' + 7y' - 3y = 0$ - уравнение третьего порядка.

Определение 3.
Решением или ***интегралом*** дифференциального уравненияназывается такая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

При отыскании решения дифференциального уравнения используют операцию интегрирования, что приводит к появлению в решении уравнения произвольной постоянной. При n- кратном интегрировании в решении появятся n произвольных постоянных, таким образом, количество произвольных постоянных совпадает с порядком дифференциального уравнения.

Определение 4.
Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, зависящая от n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и удовлетворяющая данному уравнению при любых значениях этих постоянных.

Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется ***интегрированием дифференциального уравнения,*** а общее решение дифференциального уравнения, записанное в неявном виде, называется ***общим интегралом дифференциального уравнения.***

Определение 5.
Частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего при фиксированных значениях произвольных постоянных.

Чтобы из бесконечного числа решений дифференциального уравнения, определяемых его общим решением, выделить одно частное решение, вводят, так называемые, ***начальные условия.***

Задача нахождения частного решения $y = y(x)$, удовлетворяющего начальным условиям, называется ***задачей Коши.***

Геометрически общее решение дифференциального уравнения определяет семейство кривых, называемых ***интегральными кривыми,*** а частное решение дифференциального уравнения определяет одну единственную интегральную кривую.

Дифференциальные уравнения первого порядка, основные понятия и определения.

Общий вид дифференциального уравнения I порядка определяется выражением

$$F(x, y, y') = 0$$

или

$$y' = f(x, y),$$
если оно разрешимо относительно y'.

Общим решениемдифференциального уравнения I порядка называется функция
$$y = \varphi(x, C),$$
удовлетворяющая данному уравнению при любых значениях произвольной постоянной C.

В процессе отыскания общего решения дифференциального уравнения I порядка нередко приходят к соотношению вида
$$\Phi(x, y, C) = 0,$$
не разрешённому относительно функции y. Выразить y из этого соотношения в элементарных функциях иногда является затруднительным, а иногда и не представляется возможным; в таких случаях общее решение оставляют в неявном виде и называют ***общим интегралом***дифференциального уравнения.

Частным решениемдифференциального уравнения Iпорядка называется любая функция
$$y = \varphi(x, C_0),$$
которая получается из общего решения
$$y = \varphi(x, C),$$
если в последнем произвольной постоянной C придать определённое значение $C = C_0$.

Как и в случае с общим решением частное решение также может быть записано в неявном виде
$$\Phi(x, y, C) = 0 \, (\textbf{\textit{частный интеграл}}).$$

Уравнения с разделяющимися переменными.

Определение

Уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y) \quad (1)$$

или
$$M_1(x) N_1(y) dy + M_2(x) N_2(y) dx = 0 \quad (2).$$

1. Рассмотрим уравнение вида (1). Представим

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

и подставим в исходное уравнение, получим

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

Преобразуем уравнение таким образом, чтобы все множители, содержащие переменную y,стояли в левой части, а переменную x- в правой; для этого умножим обе части уравнения на dx и разделим на $f_2(y)$, получим:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx.$$

Проинтегрируем левую часть полученного равенства по y, а правую по x имеем

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C.$$

Таким образом, получили соотношение, связывающее решение y, независимую переменную x и произвольную постоянную C, т.е. получили общий интеграл уравнения (1).

2. Рассмотрим уравнение вида (2). Перенесём второе слагаемое в правую часть:

$$M_1(x)N_1(y)dy = -M_2(x)N_2(y)dx$$

Разделим переменные, разделив обе части уравнения на $M_1(x)$ и $N_2(y)$, получим

$$\frac{N_1(y)}{N_2(y)}dy = -\frac{M_2(x)}{M_1(x)}dx.$$

Проинтегрируем обе части уравнения, получим его общий интеграл:

$$\int \frac{N_1(y)}{N_2(y)}dy = -\int \frac{M_2(x)}{M_1(x)}dx + C.$$

Однородные дифференциальные уравнения.

Определение.
Однородным называется дифференциальное уравнение I порядка, которое можно представить в виде

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Однородное дифференциальное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой

$$y = ux,$$

где

$$u = \frac{y}{x}$$

новая неизвестная функция, тогда по правилу дифференцирования произведения

$$y' = u'x + u\,.$$

Подставим выражения для y' и y в исходное уравнение, получим

$$u'x + u = f(u).$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, разделим их

$$\frac{du}{dx}x = f(u) - u \quad \left| \cdot \frac{dx}{x(f(u)-u)}\right.,$$

$$\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}\,.$$

Проинтегрируем обе части полученного уравнения с разделёнными переменными

$$\int \frac{du}{f(u)-u} = \int \frac{dx}{x} + C$$

или

$$\int \frac{du}{f(u)-u} = \ln|x| + C\,.$$

Заменив u на $\frac{y}{x}$, получим общее решение (интеграл) данного однородного уравнения.

2. Методика решения типовых задач

2.1 Пример 1. Найти общее решение уравнения $y' = -\frac{y}{x}$.

Решение. Представим $y' = \frac{dy}{dx}$, подставим в данное уравнение и разделим переменные

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \quad \Big| \cdot \frac{dx}{y},$$

получим

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем левую часть по переменной y, а правую по переменной x, получим

$$\int \frac{dy}{y} = \ln|y|, \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

приравняем полученные интегралы, получим общий интеграл уравнения

$$\ln|y| = \ln|x| + C.$$

Пример 2. Найти общий интеграл уравнения $(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0$.

Решение. Разделим переменные

$$(y-1)xdy = (1+x)ydx \quad \Big| \cdot \frac{1}{x \cdot y},$$

получим

$$\frac{(y-1)}{y}dy = \frac{(1+x)}{x}dx,$$

проинтегрируем обе части полученного уравнения по переменным y и x соответственно, получим общий интеграл уравнения

$$\int \frac{(y-1)}{y}dy = \int \frac{(1+x)}{x}dx$$

$$\int \left(1-\frac{1}{y}\right)dy = \int \left(\frac{1}{x}+1\right)dx \quad ,$$

$$\int dy - \int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{x}dx + \int dx$$

$$y - \ln|y| = \ln|x| + x + C$$

или

$$\ln|xy| + x - y = C$$

Полученное соотношение и есть общий интеграл уравнения.

Пример 3. Найтиобщее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $\left(x^2 - x^2 y\right)dy + \left(y^2 + xy^2\right)dx = 0$.

Решение. Преобразуем уравнение, вынеся за скобки общие множители:

$$x^2(1-y)dy + y^2(1+x)dx = 0$$

Разделим переменные

$$x^2(1-y)dy = -y^2(1+x)dx \quad \Big|\cdot \frac{1}{x^2y^2}$$

$$\frac{1-y}{y}dy = \frac{1+x}{x^2}dx$$

Проинтегрируем обе части уравнения, получим

$$\int \frac{1-y}{y}dy = \int \frac{1+x}{x^2}dx$$

$$\int \frac{dy}{y} - \int dy = \int \frac{1}{x^2}dx + \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| - y = -\frac{1}{x} + \ln|x| + C$$

или

$\ln|xy| + y - \dfrac{1}{x} = C$ - общий интеграл исходного уравнения.

Пример 4. Найти решение дифференциального уравнения $y' = \dfrac{y}{x+1}$, удовлетворяющее начальным условиям $y = 6$ при $x = 2$ $\left(y(2) = 6\right)$.

Решение. Имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+1} \quad \Big|\cdot \frac{dx}{y}$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x+1}$$

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x+1}$$

$$\ln|y|=\ln|x+1|+C$$

По начальным условиям определяем значение произвольной постоянной C, для этого в общий интеграл уравнения подставим $y=6,\ x=2$, получим

$$\ln 6=\ln 3+C\Rightarrow C=\ln 2.$$

Подставим найденное значение произвольной постоянной в общий интеграл уравнения, получим частный интеграл

$$\ln|y|=\ln|x+1|+\ln 2,$$

откуда получаем частное решение данного уравнения

$$y=2(x+1).$$

Пример 5. Найти частное решение уравнения $\dfrac{dx}{\cos^2 x\cos y}+ctgx\sin ydy=0$ при $y\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\pi$.

Решение. Разделим переменные

$$ctgx\sin ydy=-\frac{dx}{\cos^2 x\cos y}\quad\Big|\cdot\frac{\cos y}{ctgx}$$

$$\sin y\cos ydy=-\frac{dx}{\cos^2 xctgx}$$

$$\frac{1}{2}\sin 2y=-\frac{\sin xdx}{\cos^3 x}$$

Проинтегрируем левую часть $\int\frac{1}{2}\sin 2ydy=\frac{1}{2}\int\sin 2ydy=-\frac{1}{4}\cos 2y$.

Правую часть интегрируем заменой $t=tgx,\ dt=\dfrac{dx}{\cos^2 x}$, тогда

$$-\int\frac{tgxdx}{\cos^2 x}=-\int tdt=-\frac{t^2}{2}+C=-\frac{1}{2}tg^2x+C,$$

приравняем найденные интегралы левой и правой частей, получим общий интеграл уравнения

$$-\frac{1}{4}\cos 2y=-\frac{1}{2}tg^2x-C,\quad \frac{1}{4}\cos 2y=\frac{1}{2}tg^2x+C,$$

Подставим в общий интеграл $y=\pi,\ x=\dfrac{\pi}{3}$:

$$\frac{1}{4}\cos 2\pi = \frac{1}{2}tg^2\frac{\pi}{3} + C$$
$$\frac{1}{4} = \frac{3}{2} + C \Rightarrow C = -\frac{5}{4}.$$

Подставим найденное значение C в общий интеграл, получим частный интеграл заданного уравнения

$$\frac{1}{4}\cos 2y = \frac{1}{2}tg^2 x - \frac{5}{4} \text{ или } \cos 2y = 2tg^2 x - 5.$$

2.2Пример 6. Найти общее решение уравнения $y' = 2 + \frac{y}{x}$.

Решение. Введём новую функцию

$$u = \frac{y}{x},$$

тогда

$$y' = u'x + u,$$

подставим в исходное уравнение, получим

$$u'x + u = 2 + u.$$

Преобразуем данное уравнение в уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{du}{dx} = 2 \,\Big|\cdot dx$$
$$\int du = 2\int dx$$
$$u = 2x + C$$

Заменим u на $\frac{y}{x}$, получим общий интеграл исходного уравнения

$$\frac{y}{x} = 2x + C \text{ или } y = 2x^2 + Cx.$$

Пример 7. Найти общий интеграл уравнения $(xy + y^2)dx - (2x^2 + xy)dy = 0$.

Решение. Преобразуем данное уравнение к виду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, для этого разрешим уравнение относительно производной

$$(xy + y^2)dx = (2x^2 + xy)dy \,\Bigg|\cdot\frac{1}{(2x^2 + xy)dx}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2}{2x^2 + xy}.$$

Вынесем в числителе и в знаменателе за скобки множитель x^2, получим:

$$y' = \frac{\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2 + \frac{y}{x}}.$$

Введём теперь новую функцию $u = \frac{y}{x}$, тогда $y = ux$, $y' = u'x + u$ и данное однородное уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными

$$u'x + u = \frac{u + u^2}{2 + u}.$$

Разделим переменные

$$\frac{du}{dx}x = \frac{u + u^2}{2 + u} - u, \quad \frac{du}{dx}x = -\frac{u}{2 + u}\Bigg| \cdot \frac{(2 + u)dx}{ux}, \quad \frac{(2 + u)du}{u} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{(2 + u)du}{u} = \int \frac{dx}{x}, \quad 2\int \frac{du}{u} + \int du = \ln|x| + C, \quad 2\ln|u| + u = \ln|x| + C$$

Заменив $u = \frac{y}{x}$, получим общий интеграл исходного уравнения

$$2\ln\left|\frac{y}{x}\right| + \frac{y}{x} = \ln|x| + C.$$

Замечание. В большинстве случаев при решении однородного дифференциального уравнения, прежде чем реализовывать подстановку $u = \frac{y}{x}$, необходимо, как видно из предыдущего примера, выполнить преобразования исходного уравнения, чтобы привести его к виду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Пример 8. Найти общий интеграл уравнения $xy' + y = 2y(\ln y - \ln x)$.

Решение. Выполним в уравнении следующие преобразования: применим свойство логарифмов $\ln y - \ln x = \ln\frac{y}{x}$ и разделим обе части уравнения на x, получим

$$y' = 2\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \ln\frac{y}{x} - \frac{y}{x}$$

Решение однородного уравнения ищем в виде $y = ux$, тогда $y' = u'x + u$, подставим

$$u'x + u = 2u\ln u - u.$$

В полученном уравнении разделим переменные

$$\frac{du}{dx} = 2u(\ln u - 1) \Big| \cdot \frac{dx}{u(\ln u - 1)},$$

$$\frac{du}{u(\ln u - 1)} = 2dx,$$

Левую часть полученного уравнения проинтегрируем способом подстановки:

$$t = \ln u - 1, \quad dt = \frac{du}{u},$$

тогда

$$\int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int \frac{dt}{t} = \ln t = \ln(\ln u - 1),$$

проинтегрировав правую часть уравнения, получим

$$2\int dx = 2x + C.$$

Заменим u отношением $\frac{y}{x}$, получим общий интеграл исходного дифференциального уравнения

$$\ln\left(\ln\frac{y}{x} - 1\right) = 2x + C.$$

4. Порядок выполнения практической работы

4.1 Изучить краткие теоретические сведения.
4.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
4.3 Ответить на контрольные вопросы

5. Содержание отчёта

5.1 Тема и цель работы.
5.2 Решение заданий.
5.3 Ответы на контрольные вопросы.

6.Контрольные вопросы

6.1Дайте определение дифференциального уравнения .
6.2 Что называется порядком дифференциального уравнения?
6.3 Что называется общим решением дифференциального уравнения?
6.4 Что называется частным решением дифференциального уравнения?
6.5 Как называется процесс решения дифференциального уравнения?
6.6 Что такое задача Коши?
6.7 Запишите вид дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.
6.8 Запишите вид однородного дифференциального уравнения первого порядка.

7.Список справочной литературы

7.1 Дадаян А.А. Математика: Учебник для СПО.- М.: Инфра-М, 2019.- 544с.

7.2 Дадаян А.А. Сборник задач по математике: Учебное пособие для СПО / А.А. Дадаян.- М.: Форум, 2018.- 352с.

7.3 Конспект теоретических занятий.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВАРИАНТ №1	ВАРИАНТ №2
№1. Решить дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными: 1) $2ydx-(1+x)dy=0$ 2) $(1+x^2)dy-2xydx=0$ 3) $(1+x)ydx+(1-y)xdx=0$ y=1 при x=1 №2. Решить однородные дифференциальные уравнения первого порядка: 1) $(x+y)dx-5xdy=0$ 2) $x^2dy=(xy+y^2)dx$, y=-1 при x=1	№1. Решить дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными: 1) $ydx+(1-y)xdy=0$ 2) $(1+x^2)dy-(xy+x)dx=0$ 3) $y^2dx=e^xdy$ y=1 при x=0 №2. Решить однородные дифференциальные уравнения первого порядка: 1) $(x+y)dx+7xdy=0$ 2) $xy^2dy=(x^3+y^3)dx$, y=3 при x=1
ВАРИАНТ №3	**ВАРИАНТ №4**
№1. Решить дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными: 1) [illegible] 2) [illegible] 3) [illegible] $y=\frac{\pi}{4}$ *при* $x=\frac{\pi}{4}$ №2. Решить однородные дифференциальные уравнения первого порядка: 1) $(x-y)dx=xdy$ 2) $(2x-3y)dx+xdy=0$ y=-1 при x=1	№1. Решить дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными: 1) $(3+x)dy-(2+y)dx=0$ 2) $(y-x^2y)dy+(x+xy^2)dx=0$ 3) $2dx+ydy=yx^2dy-y^2dx$ y=1 при x=2 №2. Решить однородные дифференциальные уравнения первого порядка: 1) $(x-y)dx+5xdy=0$ 2) $(5\sqrt{xy}-y)dx+xdy=0$ y=25 при x=1

Практическое занятие №17

Тема: Решение линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

1. **Цель работы:** получить практические навыки решения линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.
2. **Время выполнения работы:** 2 академических часа.
3. **Краткие теоретические сведения:**

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Линейными однородными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентаминазывается уравнение вида

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

где
a, b, c - числа, называемые коэффициентами уравнения,
y - неизвестная функция.

Чтобы решить уравнение

$$ay'' + by' + cy = 0$$

нужно составить и решить характеристическое уравнение

$$ak^2 + bk + c = 0.$$

Общее решение дифференциального уравнения строится в зависимости от корней характеристического уравнения, а именно:

1. Если корни характеристического уравнения действительны и различны $k_1 \neq k_2 \quad (D \succ 0)$, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x},$$

где
$k_1, \quad k_2$ -корни характеристического уравнения,
$C_1, \quad C_2$- произвольные постоянные.

2. Если характеристическое уравнение имеет два одинаковых действительных корня $k_1 = k_2$ $(D = 0)$, , то решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = e^{kx}\left(C_1 x + C_2\right).$$

3. Если корни характеристического уравнения являются комплексно сопряжёнными $k_1 = \alpha + \beta i, \quad k_2 = \alpha - \beta i$ $(D \prec 0)$, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$$

2. Методика решения типовых задач

2.1 Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y' - 2y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид .Его корни $k_1 = -2, \quad k_2 = 1,$. Т.к. корни действительные и различные, то общее решение записывается в виде

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}.$$

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 4 = 0$ имеет равные корни

$$k_1 = k_2 = 2,$$

следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

Пример 3. Найти частное решение уравнения $y'' + 2y' + 5y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y\big|_{x=0} = 0$, $y'\big|_{x=0} = 1$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 2k + 5 = 0$ имеет комплексно-сопряжённые корни: $k_1 = -1 + 2i, \quad k_2 = -1 - 2i$, Таким образом, общее решение записывается в виде

$$y = e^{-x}\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right).$$

Найдём частное решение, которое удовлетворяет заданным начальным условиям. Из первого начального условия следует, что

$$0 = e^{0}\left(A\cos 0 + B\sin 0\right) \Rightarrow A\cos 0 = 0 \Rightarrow A = 0.$$

Найдём y':

$$y' = -e^{-x}\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right) + e^{-x}\left(2B\cos 2x - 2A\sin 2x\right) =$$
$$= e^{-x}\left(2B\cos 2x - 2A\sin 2x - A\cos 2x - B\sin 2x\right) =$$
$$= e^{-x}\left(\left(2B - A\right)\cos 2x + \left(-A - B\right)\sin 2x\right).$$

и подставим во второе начальное условие, получим

$$1 = \left(2B - A\right)\cos 0 + \left(-2A - B\right)\sin 0,$$

откуда, учитывая, что $A = 0$, получим

$$2B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, искомое частное решение имеет вид

$$y = \frac{1}{2}e^{-x}\sin 2x.$$

Пример 4. Найти интегральную кривую дифференциального уравнения $y'' + 2y' + 2y = 0$, проходящую через точку М(0;1) и касающуюся в этой точке прямой y=x+1.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + 2k + 2 = 0$; его корни $x_1 = 1 + i$ и $x_2 = 1 - i$ являются комплексно-сопряжёнными, поэтому уравнение множества интегральных кривых запишется следующим образом

$$y = e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x).$$

Найдём уравнение искомой интегральной кривой, для чего в равенства

$$y = e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x), y' = e^{-x}((C_2 - C_1)\cos x + (C_2 + C_1)\sin x)$$

подставим значение y=1 и углового коэффициента касательной $y' = k = 1$в точке x=0. В результате получим систему уравнений для определения постоянных C_1иC_2:

$$\begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 - C_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 1, \quad C_2 = 2.$$

Подставив эти значения в общее решение, получим уравнение искомой интегральной кривой

$$y = e^{-x}(\cos x + 2\sin x).$$

4. Порядок выполнения практической работы

4.1 Изучить краткие теоретические сведения.
4.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
4.3 Ответить на контрольные вопросы

5. Содержание отчёта

5.1 Тема и цель работы.
5.2 Решение заданий.
5.3 Ответы на контрольные вопросы.

6.Контрольные вопросы

6.1Дайте определение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
6.2 Что называется характеристическим уравнением?
6.3 Какие возможны случаи для решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?

7.Список справочной литературы

7.1 Дадаян А.А. Математика: Учебник для СПО.- М.: Инфра-М, 2019.- 544с.
7.2 Дадаян А.А. Сборник задач по математике: Учебное пособие для СПО / А.А. Дадаян.- М.: Форум, 2018.- 352с.
7.3 Конспект теоретических занятий.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВАРИАНТ №1	ВАРИАНТ №2
№1. Найти общее решение дифференциальных уравнений: 1) $y''-7y'+10y=0$ 2) $y''-5y'=0$ 3) $y''-9y=0$ 4) $y''-8y'+16y=0$ 5) $y''-6y'+25y=0$ №2. Найти частное решение дифференциального уравнения, отвечающее заданным начальным условиям: $y''-2y'-3y=0$, y=8 при x=0 и $y'=0$	№1. Найти общее решение дифференциальных уравнений: 1) $y''+y'-6y=0$ 2) $y''+3y'=0$ 3) $y''-4y=0$ 4) $y''-6y'+9y=0$ 5) $y''-2y'+5y=0$ №2. Найти частное решение дифференциального уравнения, отвечающее заданным начальным условиям: $y''+y'-20y=0$, $y=\frac{9}{5}$ при x=0 и $y'=0$
ВАРИАНТ №3	**ВАРИАНТ №4**
№1. Найти общее решение дифференциальных уравнений: 1) $y''-8y'+15y=0$ 2) $y''-y'=0$ 3) $y''-25y=0$ 4) $y''+2y'+y=0$ 5) $y''-4y'+7y=0$ №2. Найти частное решение дифференциального уравнения, отвечающее заданным начальным условиям: $y''+8y'+16y=0$, y=1 при x=0 и $y'=1$	№1. Найти общее решение дифференциальных уравнений: 1) $y''+5y'+6y=0$ 2) $y''+2y'=0$ 3) $y''-y=0$ 4) $y''-4y'+4y=0$ 5) $y''-6y'+13y=0$ №2. Найти частное решение дифференциального уравнения, отвечающее заданным начальным условиям: $y''-10y'+25y=0$, y=2 при x=0 и $y'=8$

Практическое занятие №18

Тема: Исследование рядов на сходимость. Нахождение радиуса и интервала сходимости степенных рядов.

1. **Цель работы:** получить практические навыки использования признаков Даламбера, Коши, Лейбница для определения сходимости или расходимости числовых рядов и нахождения радиуса и интервала сходимости степенных рядов.
2. **Время выполнения работы:** 2 академических часа.
3. **Краткие теоретические сведения:**

Признак Даламбера:

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

Если q>1, то ряд расходится.

Если q<1, то ряд сходится.

Признак Коши (радикальный):

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$.

Если q>1, то ряд расходится.

Если q<1, то ряд сходится.

Признак Лейбница (для знакочередующегося ряда):

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$

Ряд сходится, если выполняются два условия:

1) элементы ряда по абсолютной величине монотонно убывают;
2) предел общего члена ряда равен нулю.

Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{или} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Чтобы найти интервал сходимости степенного ряда надо:

1) применить признак Даламбера или Коши к ряду, составленному из модулей;
2) исследовать сходимость ряда на концах интервала.

2. Методика решения типовых задач

2.1 Задача 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$

Решение.

$$a_n=\frac{n}{3^n},\quad a_{n+1}=\frac{n+1}{3^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot n}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}$$

Т. к. $\frac{1}{3}<1$*, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ *сходится по признаку Даламбера.*

2.2Задача 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$

Решение.

$$a_n=\frac{n!}{10^n},\quad a_{n+1}=\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot 10^n}{10^{n+1}\cdot n!}=\frac{1}{10}\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$$

Т. к. $\infty>1$*, то ряд расходится по признаку Даламбера.*

2.3Задача 3. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{4}\right)^3+\ldots+\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^n+\ldots$$

Решение

$$a_n=\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n+1}=2$$

Т.к. $2>1$*, то ряд расходится по признаку Коши.*

2.4Задача 4. Пользуясь признаком Лейбница, исследовать на сходимость ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{n^2+1}+\ldots$$

Решение.

Так как члены данного ряда по абсолютной величине монотонно убывают $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{5}>\ldots$ и общий член ряда стремится к нулю $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}=0$, то в силу признака Лейбница ряд сходится.

2.5Задача 5.Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

$$а)\ 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\dots$$

$$б)\ 1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\dots$$

Решение.

а) Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\dots$$

По признаку Даламбера этот ряд сходится, т.к.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

Таким образом ряд расходится абсолютно.

б)Ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда

$1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\dots$ *- расходится как общегармонический (т.к.* $\frac{1}{3}<1$*).*

Следовательно, исходный ряд не является абсолютно сходящимся.
Исследуем его на условную сходимость.

Ряд $1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\dots$ *сходится (по признаку Лейбница), так как*

$$1>\frac{1}{\sqrt[3]{2}}>\frac{1}{\sqrt[3]{3}}>\dots,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=0$$

Итак, данный ряд сходится условно.

2.6Задача 6. Найти область сходимости степенного ряда

$$\frac{x+1}{2}-\frac{(x+1)^2}{2\cdot 2^2}+\frac{(x+1)^3}{3\cdot 2^3}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}+\dots$$

Решение.
Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин

$$\frac{|x+1|}{2}+\frac{|x+1|^2}{2\cdot 2^2}+\frac{|x+1|^3}{3\cdot 2^3}+\dots+\frac{|x+1|^n}{n\cdot 2^n}+\dots$$

По признаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x+1|^{n+1}\cdot n\cdot 2^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}\cdot|x+1|^n}=\frac{|x+1|}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{|x+1|}{2}$$

Рассмотрим неравенство $\frac{|x+1|}{2}<1$, откуда $-3<x<1$.

Исследуем сходимость ряда на концах промежутка.
При x=-3 получим ряд:
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$ - *этот ряд расходится как гармонический.*
При x=-3 получим ряд:
$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+(-1)^n\frac{1}{n}+...$ - *этот ряд сходится по признаку Лейбница.*
Итак, интервалом сходимости данного ряда является промежуток
$(-3;1]$ или $-3<x\leq 1$

4. Порядок выполнения практической работы

4.1 Изучить краткие теоретические сведения.
4.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
4.3 Ответить на контрольные вопросы

5. Содержание отчёта

5.1 Тема и цель работы.
5.2 Решение заданий.
5.3 Ответы на контрольные вопросы.

6.Контрольные вопросы

6.1Какой признак применим для знакочередующихся рядов?
6.2Какой ряд называется абсолютно сходящимся?
6.3Какой ряд называется условно сходящимся?

7.Список справочной литературы

7.1 Дадаян А.А. Математика: Учебник для СПО.- М.: Инфра-М, 2019.- 544с.
7.2 Дадаян А.А. Сборник задач по математике: Учебное пособие для СПО / А.А. Дадаян.- М.: Форум, 2018.- 352с.
7.3 Конспект теоретических занятий.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВАРИАНТ №1	ВАРИАНТ №2
№1.Исследовать на сходимость ряды $1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$ $2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$ $3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ $4)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{2^n}$ №2. Найти область сходимости ряда $1)1-4x+4^2\cdot x^2-...(-4)^n\cdot x^n+...$ $2)(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2^2}+\frac{(x-1)^3}{3^2}+...+\frac{(x-1)^n}{n^2}+...$	№1. Исследовать на сходимость ряды $1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$ $2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n^2}{5^n}$ $3)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ $4)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2n+1}$ №2. Найти область сходимости ряда $1)x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}+...$ $2)(x-2)+\frac{(x-2)^2}{\sqrt{2}}+\frac{(x-2)^3}{\sqrt{3}}+...+\frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}$
ВАРИАНТ №3	**ВАРИАНТ №4**
№1.Исследовать на сходимость ряды $1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n^2}$ $2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3\cdot 2^n}$ $3)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2}$ $4)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n}$ №2. Найти область сходимости ряда $1)\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2\cdot 2^2}+\frac{x^3}{3\cdot 2^3}+...+\frac{x^n}{n\cdot 2^n}+...$ $2)(x+3)+\frac{(x+3)^2}{2^2}+\frac{(x+3)^3}{3^2}+...+\frac{(x+3)^n}{n^2}+...$	№1 Исследовать на сходимость ряды $1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{5^n}$ $2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}$ $3)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{4n-1}\right)^{n^2}$ $4)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ №2. Найти область сходимости ряда $1)x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n^2}+...$ $2)x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n}+...$