ПРИЛОЖЕНИЕ 2
к рабочей программе

МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ «РОСТОВСКИЙ-НА-ДОНУ КОЛЛЕДЖ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ, ИНФОРМАЦИОННЫХ И ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»
(ГБПОУ РО «РКРИПТ»)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

по дисциплине

ЕН.01 МАТЕМАТИКА

для специальности

11.02.16 Монтаж, техническое обслуживание и ремонт электронных приборов и устройств

Квалификация выпускника:
специалист по электронным приборам и устройствам

Составитель:
Сельцина Н.В.,
преподаватель высш. квалиф. кат.
ГБПОУ РО «РКРИПТ»

2024, г. Ростов-на-Дону

Введение

Лабораторные и практические занятия по учебной дисциплине ЕН.01 Математика составляют важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки и направлены на подтверждение теоретических положений и формирование практических умений и практического опыта:

ОК.01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК.02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК. 03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях

ОК. 04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

ОК. 05 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста

ОК. 06 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных общечеловеческих ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения

ОК. 07 Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

ОК.08 Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности

ОК.09 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках

Профессиональные компетенции:

ПК.1.1 Осуществлять сборку, монтаж и демонтаж электронных приборов и устройств в соответствии с требованиями технической документации.

ПК.1.2 Осуществлять сборку, монтаж и демонтаж электронных приборов и устройств и их настройку и регулировку в соответствии с требованиями технической документации и с учетом требований технических условий

Лабораторные и практические занятия относятся к основным видам учебных занятий.

Выполнение студентами лабораторных и практических работ направлено:

– на обобщение, систематизацию, углубление, закрепление полученных теоретических знаний по конкретным темам дисциплин;

– формирование умений применять полученные знания на практике;

– реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;

– развитие интеллектуальных умений (аналитических, проектировочных, конструкторских и др.) у будущих специалистов;

– выработку при решении поставленных задач таких профессионально значимых качеств, как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Ведущей дидактической целью лабораторных занятий является экспериментальное подтверждение и проверка существенных теоретических положений (законов, зависимостей).

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование практических умений – профессиональных (выполнять определенные действия, операции, необходимые в последующем в профессиональной деятельности) или учебных (решать задачи по математике, физике, химии, информатике и др.), необходимых в последующей учебной деятельности.

Содержанием лабораторных работ по дисциплине /профессиональному модулю являются экспериментальная проверка формул, методик расчета, установление и подтверждение закономерностей, ознакомление с методиками проведения экспериментов, установление свойств веществ, их качественных и количественных характеристик, наблюдение развития явлений, процессов и др. В ходе выполнения заданий у студентов формируются практические умения и навыки обращения с различными приборами, установками, лабораторным оборудованием, аппаратурой, которые могут составлять часть профессиональной практической подготовки, а также исследовательские умения (наблюдать, сравнивать, анализировать, устанавливать зависимости, делать выводы и обобщения, самостоятельно вести исследование, оформлять результаты).

Содержанием практических занятий по дисциплине /профессиональному модулю являются решение разного рода задач, в том числе профессиональных (анализ производственных ситуаций, решение ситуационных производственных задач, выполнение профессиональных функций в деловых играх и т.п.), выполнение вычислений, расчетов, чертежей, работа с измерительными приборами, оборудованием, аппаратурой, работа с нормативными документами, инструктивными материалами, справочниками, составление проектной, плановой и другой технической и специальной документации и другое.

Содержание практических, лабораторных занятий охватывают весь круг профессиональных умений, на подготовку к которым ориентирована данная дисциплина/профессиональный модуль, которые в дальнейшем закрепляются и совершенствуются в процессе курсового проектирования, практикой по профилю специальности и преддипломной практикой.

Лабораторные занятия проводятся в специально оборудованных учебных лабораториях. Практическое занятие должно проводиться в учебных кабинетах или специально оборудованных помещениях (площадках). Продолжительность занятия

– не менее 2-х академических часов. Необходимыми структурными элементами занятия, помимо самостоятельной деятельности студентов, являются инструктаж, проводимый преподавателем, а также организация обсуждения итогов выполнения работы.

Все студенты, связанные с работой в лаборатории, обязаны пройти инструктаж по безопасному выполнению работ, о чем расписываются в журнале инструктажа по технике безопасности.

Выполнению лабораторных и практических работ предшествует проверка знаний студентов, их теоретической готовности к выполнению задания.

Лабораторные и практические работы студенты выполняют под руководством преподавателя. При проведении лабораторных и практических занятий учебная группа может делиться на подгруппы численностью не менее 8 человек. Объем заданий для лабораторных и практических занятий спланирован с расчетом, чтобы за отведенное время они могли быть выполнены качественно большинством студентов.

Формы организации работы обучающихся на лабораторных работах и практических занятиях: фронтальная, групповая и индивидуальная.

При фронтальной форме организации занятий все студенты выполняют одновременно одну и ту же работу. При групповой форме организации занятий одна и та же работа выполняется бригадами по 2 - 5 человек. При индивидуальной форме организации занятий каждый студент выполняет индивидуальное задание.

Отчет по практической и лабораторной работе представляется в печатном виде в формате, предусмотренном шаблоном отчета по практической, лабораторной работе. Защита отчета проходит в форме доклада обучающегося по выполненной работе и ответов на вопросы преподавателя.

Оценки за выполнение лабораторных работ и практических занятий могут выставляться по пятибалльной системе или в форме зачета и учитываться как показатели текущей успеваемости студентов.

Критерии оценки лабораторных, практических работ.

Оценка «5» ставится, если учащийся выполняет работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности проведения опытов и измерений; самостоятельно и рационально монтирует необходимое оборудование; все опыты проводит в условиях и режимах, обеспечивающих получение правильных результатов и выводов; соблюдает требования правил безопасности труда; в отчете правильно и аккуратно выполняет все записи, таблицы, рисунки, чертежи, графики, вычисления; правильно выполняет анализ погрешностей.

Оценка «4» ставится, если выполнены требования к оценке «5» , но было допущено два - три недочета, не более одной негрубой ошибки и одного недочёта.

Оценка «3» ставится, если работа выполнена не полностью, но об ъем выполненной части таков, позволяет получить правильные результаты и выводы: если в ходе проведения опыта и измерений были допущены ошибки.

Оценка «2» ставится, если работа выполнена не полностью и объ ем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов: если опыты, измерения, вычисления, наблюдения
производились неправильно.

Практическое занятие №1

Тема: Действия над комплексными числами в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.
Цель работы: получить практические навыки выполнения действий с комплексными числами в различных формах записи, нахождения модуля и аргумента комплексного числа, решения квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом.

1. Краткие теоретические сведения

Комплексным числом z называется выражение вида

$$z = x + iy,$$

где x, y - действительные числа, i - мнимая единица

$$i^2 = -1.$$

x - ***действительная часть*** комплексного числа $(\operatorname{Re} z)$,
y - **мнимая часть** комплексного числа. $(\operatorname{Im} z)$

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются **равными,** если равны их действительные и мнимые части:

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2$$

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются **сопряженными.**

Запись комплексного числа

$$z = x + iy,$$

называется **алгебраической формой записи** комплексного числа **z.**

Действия с комплексными числами в алгебраической форме записи.

1. Сложение

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством:

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

2. Вычитание

Разностью двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число:

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

3. Умножение

Произведением комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число:

$$z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

На практике, чтобы выполнить умножение комплексных чисел

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$

нужно раскрыть скобки, заменить $i^2 = -1$, а затем привести подобные слагаемые.

4. Деление

Частное двух комплексных чисел z_1 и $z_2 \neq 0$ находят по следующему **правилу**: числитель и знаменатель дроби $\dfrac{z_1}{z_2}$ умножают на число $\overline{Z}_2$, сопряженное знаменателю, раскрывают скобки, заменяют $i^2 = -1$, приводят подобные слагаемые и почленно делят числитель на знаменатель.

Возведение в степень комплексного числа и извлечение корня n-ой степени из комплексного числа в алгебраической форме не выполняют.

Геометрическое изображение комплексного числа.

Комплексное число $z = x + iy$, изображают на координатной плоскости в виде радиус-вектора, конец которого имеет координаты $(x; y)$

Длина радиус-вектора называется **модулем комплексного числа,** обозначается r и вычисляется по формуле:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Угол, который радиус-вектор, изображающий комплексное число, образует с положительным направлением оси OX, называется **аргументом комплексного числа** и обозначается φ.

Аргумент комплексного числа удобно определять с помощью следующей таблицы:

Четверть, в которой находится радиус-вектор, изображающий комплексное число	Формула для определения аргумента
I	$\varphi = \varphi_0$
II, III	$\varphi = \varphi_0 + \pi$
IV	$\varphi = \varphi_0 + 2\pi$

где φ_0 определяют по формуле:

$$\varphi_0 = arctg\,\frac{y}{x}.$$

Тригонометрическая форма записи комплексного числа:

$$z = r(\sin\varphi + i\sin\varphi)$$

Показательная форма записи комплексного числа:

$$z = r \cdot e^{i\varphi}$$

Действия с комплексными числами в тригонометрической и показательной формах записи:

Действие	**Тригонометрическая форма записи** $z_1 = r_1(\sin\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ $z_2 = r_2(\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$	**Показательная форма записи** $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$ $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$
Умножение	$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$	$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$
Деление	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$
Возведение в целую степень	$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$	$z^n = r^n e^{in\varphi}$

Извлечение корня n-ой степени	$z_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$, $k=0\div(n-1)$	$z_k=\sqrt[n]{r}e^{i\cdot\frac{\varphi+2\pi k}{n}}$, $k=0\div(n-1)$

2. Методика решения типовых задач

2.1 Пример 1. Выполнить действия в алгебраической форме

$$\frac{(7-5i)(6+7i)}{(1-3i)+(3-i)}.$$

Решение. В числителе дроби раскроем скобки, а в знаменателе выполним сложение комплексных чисел, сложив соответственно действительные и мнимые части:

$$\frac{(7-5i)(6+7i)}{(1-3i)+(3-i)}=\frac{42+49i-30i-35i^2}{4-4i}=\frac{42+35+19i}{4-4i}=\frac{77+19i}{4-4i}.$$

Умножим теперь числитель и знаменатель дроби на выражение $4+4i$, сопряжённое знаменателю:

$$\frac{(77+19i)\cdot(4+4i)}{(4-4i)\cdot(4+4i)}=\frac{308+308i+76i+76i^2}{16-16i^2}=\frac{234+384i}{32}=\frac{117}{16}+12i.$$

2.2 Пример 2. Даны числа $z_1=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\;\; z_2=-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}i$. Выполнить в тригонометрической форме записи $z_1\cdot z_2$, $\sqrt[3]{z_1}$, в показательной форме $\frac{z_1}{z_2}$, ${z_2}^4$.

Решение. Найдём модули и аргументы чисел z_1 и z_2:

$$r_1=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1.$$

$$r_2=\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Радиус-вектор, изображающий число z_1 находится в IV четверти, поэтому аргумент числа z_1 находим по формуле

$$\varphi_1 = \varphi_0 + 2\pi = arctg\,\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} + 2\pi = -arctg\sqrt{3} + 2\pi = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$$

Радиус-вектор, изображающий число z_2 находится в III четверти, поэтому аргумент числа z_2 находим по формуле

$$\varphi_2 = \varphi_0 + 2\pi = arctg\,\frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}} + \pi = arctg1 + \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$$

Запишем числа z_1 и z_2 в тригонометрической и показательной формах:

$$z_1 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3},\ z_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$z_1 = e^{\frac{5\pi}{3}i},\quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{\frac{5\pi}{4}i}.$$

Найдём $z_1 \cdot z_2$ (см. таблицу):

$$z_1 z_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{5\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{35\pi}{12} + i\sin\frac{35i}{12}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$$

Найдём $\sqrt[3]{z_1}$ (см. таблицу):

$k = 0,\qquad z_{1,0} = \cos\frac{5\pi}{9} + i\sin\frac{5\pi}{9}$

$k = 1,\qquad z_{1,1} = \cos\frac{\frac{5\pi}{3} + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{5\pi}{3} + 2\pi}{3} = \cos\frac{11\pi}{9} + i\sin\frac{11\pi}{9}$

$k = 2,\qquad z_{1,2} = \cos\frac{\frac{5\pi}{3} + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{5\pi}{3} + 4\pi}{3} = \cos\frac{17\pi}{9} + i\sin\frac{17\pi}{9}$

Найдём $\frac{z_1}{z_2}$ (см. таблицу):

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{3}}e^{i\left(\frac{5\pi}{3}-\frac{5\pi}{4}\right)}=\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{\frac{5\pi}{12}i}$$

Найдём z_2^4 (см. таблицу):

$$z_2^4=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^4 e^{4\cdot\frac{5\pi}{4}i}=\frac{4}{81}e^{5\pi\cdot i}=\frac{4}{81}e^{\pi i}$$

2.3 Пример 3. Решить уравнение с отрицательным дискриминантом $x^2+4x+13=0$.

Решение. Вычислим дискриминант квадратного уравнения:

$$D=b^2-4ac=4^2-4\cdot 13=-36.$$

Представим

$$-36=-1\cdot 36=36\cdot i^2$$

Воспользуемся формулой корней квадратного уравнения, получим

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-4\pm\sqrt{36i^2}}{2}=\frac{-4\pm 6i}{2}=-2\pm 3i.$$

Таким образом, корнями квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом являются два комплексно сопряжённых числа. В данном случае

$$z_1=-2+3i,\quad z_2=-2-3i$$

3. Порядок выполнения практической работы

3.1 Изучить краткие теоретические сведения.
3.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
3.3 Ответить на контрольные вопросы

4. Содержание отчёта

4.1 Тема и цель работы.
4.2 Решение заданий.
4.3 Ответы на контрольные вопросы.

5.Контрольные вопросы

5.1 Дайте определение комплексного числа.
5.2 Что называется мнимой единицей?
5.3 Как записывают комплексное число в алгебраической форме?
5.4 Как выполняют сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел в алгебраической форме записи?

5.5 Как геометрически изображают комплексное число?
5.6 Что называется модулем и аргументом комплексного числа? Запишите формулу вычисления модуля и аргумента.
5.7 Как записывают комплексное число в тригонометрической форме, в показательной форме?
5.8 Как выполняют умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня целой степени в тригонометрической и показательной формах записи (запишите формулы)?

6.Список справочной литературы

6.1 Богомолов Н.В., Самойленко П.И. Математика, Учебник. - М: Дрофа, 2016-395с.
6.2 Конспект теоретических занятий.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВАРИАНТ №1	**ВАРИАНТ №2**
№1. Выполнить действия в алгебраической форме: $$\frac{(2+i)\cdot(3-i)}{(2+3i)-(3+2i)}$$	№1. Выполнить действия в алгебраической форме: $$\frac{(4+i)\cdot(5+3i)}{(3+i)+(2+i)}$$
№2. Даны числа $z_1=-\frac{1}{7}+\frac{\sqrt{3}}{7}i$ и $z_2=-\frac{3}{5}+\frac{\sqrt{3}}{5}\cdot i$.	№2. Даны числа $z_1=-\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{3}}{8}i$ и $z_2=-1-\sqrt{3}\cdot i$.
а) Записать числа z_1 и z_2 в тригонометрической и показательной формах, геометрически изобразить эти числа.	а) Записать числа z_1 и z_2 в тригонометрической и показательной формах, .геометрически изобразить эти числа.

b) Найти $z_1 \cdot z_2$ и $\frac{z_1}{z_2}$ в тригонометрической форме. c) Найти $\sqrt[3]{z_1}$ в показательной форме. №3. Решить уравнение: $x^2 - 2x + 5 = 0$	b) Выполнить действия в тригонометрической форме $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1{}^3$. c) Выполнить действия в показательной форме $z_1 \cdot z_2$, $\sqrt[3]{z_2}$. №3. Решить уравнение: $x^2 - 8x + 25 = 0$
ВАРИАНТ №3	**ВАРИАНТ №4**
№1. Выполнить действия в алгебраической форме: $\frac{(3-i)\cdot(1-4i)}{(2-i)+(-2+2i)}$ №2. Даны числа $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ и $z_2 = -4 - 4\sqrt{3}\cdot i$. a) Записать числа z_1 и z_2 в тригонометрической и показательной формах, геометрически изобразить эти числа.	№1. Выполнить действия в алгебраической форме: $\frac{(5-7i)\cdot(7+6i)}{(4-5i)-(3-4i)}$ №2. Даны числа $z_1 = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i$ и $z_2 = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot i$. a) Записать числа z_1 и z_2 в тригонометрической и показательной формах, геометрически изобразить эти числа.

b) Выполнить действия в тригонометрической форме $z_1 \cdot z_2$, $\sqrt[3]{z_1}$. c) Выполнить действия в показательной форме $\frac{z_2}{z_1}$, $z_2^{\,3}$. №3. Решить уравнение: $x^2 + 6x + 18 = 0$	b) Выполнить действия в тригонометрической форме $z_2^{\,5}$, $\sqrt[4]{z_1}$ c) Выполнить действия в показательной форме $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 \cdot z_2$. №3. Решить уравнение: $x^2 + 8x + 17 = 0$

Практическое занятие №2

Тема: Дифференцирование элементарных и сложных функций. Решение практических задач с помощью производных.

Цель работы: получить практические навыки нахождения производных различных функций

1. Краткие теоретические сведения

Производной функции $y = y(x)$ называется предел отношения приращения функции (Δy) к приращению аргумента (Δx), когда приращение аргумента стремится к нулю.

y' - обозначение производной функции $y = y(x)$.

Согласно определению

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Основные правила дифференцирования:

1. ***Производная постоянной величины.***

$$C' = 0.$$

2. ***Производная суммы***

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

3. ***Производная произведения.***

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Следствие.

$$(cu)' = cu'.$$

4. ***Производная частного***.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

5. **Производная сложной функции**

Сложной называется функция, у которой аргумент также является функцией. Символически сложную функцию обозначают

$$y = y\big(f(x)\big),$$

где $f(x)$ - промежуточный аргумент сложной функции y.

При нахождении производной сложной функции используют ***правило дифференцирования сложной функции*** и ***таблицей производных сложных функций.***

Правило дифференцирования сложной функции

$$y' = y_f' \cdot f_x'$$

Практическое правило: чтобы найти производную сложной функции её надо продифференцировать как простую, сохраняя аргумент и результат умножить на производную этого аргумента.

6. Таблица производных элементарных функций.

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$, в частности $x' = 1$, $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$,

$(kx + b)' = k$.

2. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, в частности $(e^x)' = e^x$.

3. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, в частности $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

4. $(\sin x)' = \cos x$.

5. $(\cos x)' = -\sin x$.

6. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

7. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

8. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

9. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

10. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

11. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

7. Таблица производных сложных функций

1. $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$, в частности $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$,

$((ax+b)^n)' = an(ax+b)^{n-1}$

2. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, в частности $(e^u)' = e^u \cdot u'$.

3. $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}$, в частности $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

4. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.

5. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.

6. $(tgu)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

7. $(ctgu)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$.

8. $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

9. $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

10. $(arctgu)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

11. $(arcctgu)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

2. Методика решения типовых задач

2.1 Пример 1. Найти производную функции $y = 5x^3 - 3x^2 + \ln x$.

Решение. Применим последовательно правила дифференцирования производная суммы нескольких функций, вынесение постоянного множителя за знак производной и формулы из таблицы производных 2 и 4, получим:

$$y' = \left(5x^3 - 3x^2 + \ln x\right)' = 5\left(x^3\right)' - 3\left(x^2\right)' + (\ln x)' = 5 \cdot 3x^{3-1} - 3 \cdot 2x^{2-1} + \frac{1}{x} =$$

$$= 15x^2 - 6x + \frac{1}{x}.$$

Пример 2. Найти производную функции $y = \sqrt{x} - \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x^2}$.

Решение. Представим каждое слагаемое в правой части уравнения функции в виде степени:

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{-\frac{2}{3}}, \quad \frac{1}{x^2} = x^{-2},$$

тогда

$$y' = \left(\sqrt{x} - \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x^2}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}} - 5x^{-\frac{2}{3}} - x^{-2}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} - 5 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{2}{3}-1} - (-2)x^{-2-1} =$$

$$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{10}{3}x^{-\frac{4}{3}} + 2x^{-3},$$

2.2 Пример 3. Найти производную функции $y = e^x \cdot arctgx$.

Решение. Применим правило дифференцирования производная частного, получим:

$$y' = \left(e^x \cdot arctgx\right)' = \left(e^x\right)' \cdot arctgx + e^x \cdot (arctgx)' = e^x \cdot arctgx + e^x \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

2.3 Пример 4. Найти производную функции $y = \frac{\cos x}{9^x - 3x^2}$.

Решение. Применим правило дифференцирования производная частного:

$$y' = \left(\frac{\cos x}{9^x - 3x^2}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \left(9^x - 3x^2\right) - \cos x \cdot \left(9^x - 3x^2\right)'}{\left(9^x - 3x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{-\sin x \cdot \left(9^x - 3x^2\right) - \cos x \cdot \left(9^x \ln x - 6x\right)}{\left(9^x - 3x^2\right)^2}.$$

2.4 Пример 5. Найти производную функции $y = \sin^3 x$

Решение. Продифференцируем данную функцию как степенную с промежуточным аргументом $\sin x$, получим:

$$y' = 3\sin^2 x \cdot (\sin x)' = 3\sin^2 x \cdot \cos x.$$

Пример 6. Найти производную функции $y = \ln\cos x$.

Решение. Продифференцируем данную функцию как логарифмическую с промежуточным аргументом $\cos x$, получим:

$$y' = \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' = \frac{-\sin x}{\cos x} = -tgx.$$

Пример 7. Найти производную функции $y = \ln\sin\frac{x+2}{x}$.

Решение. Продифференцируем данную функцию как сложный логарифм, аргументом которого также является сложная функция синус:

$$y' = \left(\ln\sin\frac{x+2}{x}\right)' = \frac{1}{\sin\frac{x+2}{x}} \cdot \left(\sin\frac{x+2}{x}\right)' = \frac{1}{\sin\frac{x+2}{x}} \cdot \cos\frac{x+2}{x} \cdot \left(\frac{x+2}{x}\right)' =$$

$$= ctg\,\frac{x+2}{x} \cdot \frac{(x+2)' \cdot x - (x+2)\cdot x'}{x^2} = ctg\,\frac{x+2}{x} \cdot \frac{x-x-2}{x^2} = -\frac{2}{x^2}\,ctg\,\frac{x+2}{x}.$$

3. Порядок выполнения практической работы

3.1 Изучить краткие теоретические сведения.
3.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
3.3 Ответить на контрольные вопросы

4. Содержание отчёта

4.1Тема и цель работы.
4.2 Решение заданий.
4.3Ответы на контрольные вопросы.

5.Контрольные вопросы

5.1 Дайте определение производной функцию
5.2 Сформулируйте правила дифференцирования.

6.Список справочной литературы

6.1 Алексеева Е.В. Дифференциальное исчисление функции одной переменной: учебное пособие для студентов 1-го и 2-го курса технических специальностей по разделу дисциплины «Математика»
6.2 Конспект теоретических занятий

ПРИЛОЖЕНИЕ

1.Найти производные следующих функций:

ВАРИАНТ №1	ВАРИАНТ №2
№1. $y = 5\sqrt{x} - \dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{3}{x^3} - \dfrac{4}{x}$	№1 $y = 6x^2 - \dfrac{5}{x^3} - \sqrt[3]{x^4} + \dfrac{9}{\sqrt{x}}$
№2. $y = arctgx \cdot \ln 2x$	№2 $y = e^{-2x} \cdot \ln(3x+4)$
№3. $y = \dfrac{\cos 8x}{ctgx + 3x^2}$	№3. $y = \dfrac{x - \sin 4x}{\sqrt{x}}$
№4. $y = \left(5x^2 + e^{3x}\right) \cdot arcctgx$	№4. $y = arctg6x \cdot \left(e^{tgx} + 2\right)$
№5 $y = \ln \dfrac{1 + \sin 3x}{1 - \sin 3x}$	№5. $y = \cos \ln\left(2x - x^2\right)$
ВАРИАНТ №3	**ВАРИАНТ №4**
№1. $y = 2\sqrt[4]{x} + 9x^2 - 5\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{7}{x^2}$	№1. $y = 5\sqrt{x} + 3\sqrt[4]{x} - \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}$
№2. $y = \arccos x \cdot e^{-3x}$	№2. $y = \ln(2x+1) \cdot arctgx$
№3. $y = \dfrac{tg4x}{\sin x + 5x}$	№3. $y = \dfrac{e^{2x} - 3}{\cos x}$
№4. $y = (2 + 3\arcsin 7x) \cdot \left(x^2 + \ln\left(x^2+1\right)\right)$	№4. $y = \left(2\arccos 3x + 5x^3\right) \cdot e^{tgx}$
№5. $y = \sin^2 \dfrac{1-x}{1+x}$	№5. $y = \ln \sin \dfrac{x+2}{x}$

2. Решить задачу

Вариант1.

Задача. Тело движется прямолинейно по закону $S = 2t^3 + t^2 - 4$. Найти значение скорости и ускорения в момент времени t = 4.

Вариант2.

Задача. Тело массой 10 кг движется прямолинейно по закону $S = 3t^2 + t + 4$. Найти кинетическую энергию тела $\left(E_к = \frac{m\vartheta^2}{2}\right)$ через 4с. после начала движения.

Вариант3.

Задача. Сила тока изменяется в зависимости от времени t по закону $I = 0{,}4t^2$(I – в амперах, t – в секундах). Найти скорость измерения силы тока в конце 8ой секунды.

Вариант4.

Задача. Температура тела T изменяется в зависимости от времени t по закону

$T = 0{,}5t^2 - 2t$. С какой скоростью нагревается это тело в момент времени $t = 5°$.

Практическое занятие №3

Тема: Нахождение неопределенного интеграла методами непосредственного интегрирования, подстановки и интегрирования по частям.

Цель работы: получить практические навыки нахождения неопределённых интегралов различными способами.

1.Краткие теоретические сведения

Функция $F(x)$ **называется *первообразной* для функции** $f(x)$ **на некотором промежутке** X **, если для всех значений** x **из этого промежутка выполняется**

$$F'(x) = f(x).$$

Теорема.

Если функция $F(x)$ ***является первообразной для функции*** $f(x)$ ***на некотором промежутке*** X ***, то функция***

$$F(x)+C,$$

где C ***- произвольная постоянная, также является первообразной для*** $f(x)$ ***на этом же промежутке.***

Определение.

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$**, определённых на некотором промежутке, называется *неопределённым интегралом* от функции** $f(x)$ **на этом промежутке и обозначается символом**

$$\int f(x)dx.$$

Читается: «интеграл от эф от икс де икс».

По определению

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

$f(x)$ - подынтегральная функция,

$f(x)dx$ - подынтегральное выражение,

x - переменная интегрирования,

$\int$ - знак неопределённого интеграла,

С - постоянная величина (константа).

Нахождение неопределённого интеграла по данной подынтегральной функции называется ***интегрированием*** этой функции.

Так как интегрирование представляет собой операцию, обратную дифференцированию, то для того чтобы проверить, правильно ли выполнено интегрирование, достаточно продифференцировать результат и получить при этом подынтегральную функцию.

Основные свойства неопределённого интеграла

1. ***Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции.***

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2. Дифференциал неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению.

$$d\left(\int f(x)dx\right)= f(x)dx.$$

3. Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная.

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

5. Неопределённый интеграл от алгебраической суммы двух или более функций равен алгебраической сумме интегралов от каждой из этих функций.

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(dx) \pm \int g(x)dx.$$

Таблица простейших интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, где $n \neq -1$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, в частности, $\int e^x dx = e^x + C$
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\qquad \int \sin axdx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$ $\qquad \int \cos axdx = \frac{1}{a}\sin ax + C$
6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$, $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$

10. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C$.

Интегралы, содержащиеся в данной таблице, называются ***табличными*** интегралами.

Основные методы интегрирования.

Задача интегрирования принципиально труднее задачи дифференцирования. Так, например, таблица интегралов не исчерпывает даже основных элементарных функций, не говоря уже о сложных функциях.

Не существует также правил интегрирования произведения, частного, сложной и обратной функций.

Существуют лишь отдельные методы, позволяющие интегрировать отдельные классы подынтегральных функций, и выбор того или иного метода интегрирования зависит от вида подынтегральной функции.

Непосредственное интегрирование.

Непосредственное интегрирование - это такой способ интегрирования, при котором данный интеграл с помощью различных преобразований подынтегральной функции и свойств неопределённого интеграла сводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Метод замены переменной (способ подстановки).

Найти заданный неопределённый интеграл непосредственным интегрированием удаётся далеко не всегда, а иногда это сопряжено с большими трудностями. В таких случаях применяют другие способы интегрирования.

Одним из наиболее эффективных методов является ***способ подстановки*** или ***замены переменной интегрирования***.

Сущность этого метода заключается в том, что путём введения новой переменной интегрирования удаётся свести заданный интеграл к новому интегралу, который сравнительно лёгко берётся непосредственно.

Алгоритм метода:

Пусть дан интеграл $\int f(x)dx$, который не является табличным.

1. Записываем уравнение замены

$$y = y(x),$$

где $y(x)$ - некоторая функция.

2. Находим дифференциал этой функции
$$dy = y'(x)dx.$$
3. Выражаем
$$dx = \frac{dy}{y'(x)}.$$
4. Подставим y и dy в данный интеграл:
$$\int f(x)dx = \int g(y)dy.$$

Если замена выполнена правильно, то
$$\int g(y)dy$$
будет табличным.

5. Находим
$$\int g(y)dy = F(y) + C.$$
6. Чтобы получить окончательный ответ, вместо переменной y подставляем выражение $y(x)$:
$$\int f(x)dx = F\big(y(x)\big) + C.$$

Интегрирование по частям.

Интегрирование по частям – это, практически, формула интегрирования произведения двух функций.

Хорошо известна формула дифференциала произведения двух функций:
$$d(uv) = udv + vdu$$
Проинтегрировав обе части данного равенства, получим:
$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu,$$
т.к.
$$\int d(uv) = uv,$$
то
$$uv = \int udv + \int vdu,$$
Откуда
$$\int udv = uv - \int vdu.$$
Последняя формула называется ***формулой интегрирования по частям***.

Формула интегрирования по частям сводит нахождение интеграла $\int udv$ к отысканию другого интеграла $\int vdu$; её применение целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл либо проще исходного, либо подобен ему.

При этом в качестве u берётся функция, которую проще продифференцировать, а в качестве dv берётся та часть подынтегрального выражения, которую проще проинтегрировать. Иногда формулу интегрирования по частям приходиться использовать несколько раз.

При применении формулы интегрирования по частям интегралы можно разбить на 3 основные группы:

1. В интегралах вида

$$\int P(x)e^{ax}dx, \qquad \int P(x)\sin axdx, \qquad \int P(x)\cos axdx,$$

где $P(x)$ - многочлен переменной x, a - число, полагают

$$u = P(x), \qquad dv = \begin{cases} e^{ax}dx, \\ \sin axdx, \\ \cos axdx \end{cases}$$

2. В интегралах вида

$$\int P(x)\ln xdx, \quad \int P(x)\arcsin xdx, \quad \int P(x)\arccos xdx,$$
$$\int P(x)arctgxdx, \quad \int P(x)arcctgxdx$$

полагают

$$u = \begin{cases} \ln x, \\ \arcsin x, \\ \arccos x, \\ arctgx, \\ arcctgx \end{cases} \qquad dv = P(x)dx$$

3. В интегралах вида

$$\int e^{ax}\sin bxdx, \quad \int e^{ax}\cos bxdx$$

за u принимают любую функцию, за dv соответственно оставшуюся часть подынтегрального выражения.

2. Методика решения типовых задач

2.1 Пример 1. Найти неопределённый интеграл $\int (5x^4 - 4x^2 + 3x - 1)dx$.

Решение. Применим свойство 5:

$$\int (5x^4 - 4x^2 + 3x - 1)dx = \int 5x^4dx - 4x^2dx + \int 3xdx - \int dx.$$

В первых трёх интегралах применим свойство 4, в четвёртом - свойство 3, а затем табличный интеграл 1, получим:

$$\int 5x^4dx - 4x^2dx + \int 3xdx - \int dx = 5\int x^4dx - 4\int x^2dx + 3\int xdx - x =$$

$$= 5\cdot\frac{x^5}{5} - 4\cdot\frac{x^3}{3} + 3\cdot\frac{x^2}{2} - x + C = x^5 - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x + C$$

.

Пример 2. Найти неопределённый интеграл $\int\left(5\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}} + 1\right)dx$.

Решение. Используем свойства 5 и 4, а также преобразуем каждое слагаемое подынтегральной функции в степень, получим:

$$\int\left(5\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}} + 1\right)dx = 5\int x^{\frac{2}{3}}dx - 3\int x^{-2}dx - 2\int x^{-\frac{4}{3}}dx + \int dx =$$

$$= 5\cdot\frac{3}{5}\cdot x^{\frac{5}{3}} - 3\cdot\frac{x^{-1}}{-1} - 2\cdot(-3)\cdot x^{-\frac{1}{3}} + x + C = 3\sqrt[3]{x^5} + \frac{3}{x} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}} + x + C$$

.

Пример 3. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{3x^4 + 2x^2 - 3x + 7}{x^2}dx$.

Решение. Разделим почленно числитель дроби на знаменатель, получим

$$\int \frac{3x^4 + 2x^2 - 3x + 7}{x^2}dx = \int\left(3x^2 + 2 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}\right)dx$$

.

Применим свойство 5:

$$\int\left(3x^2 + 2 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}\right)dx = \int 3x^2dx + \int 2dx - \int \frac{3}{x}dx + \int \frac{7}{x^2}dx =$$

$$= 3\int x^2dx + 2\int dx - 3\int \frac{dx}{x} + 7\int x^{-2}dx = 3\cdot\frac{x^3}{3} + 2x - 3\ln|x| + 7\cdot\frac{x^{-1}}{-1} + C =$$

$$= x^3 + 2x - 3\ln|x| - \frac{7}{x} + C$$

Пример 4. Найти неопределённый интеграл $\int e^x\left(3 - \frac{e^{-x}}{2\cos^2 x}\right)dx$.

Решение. Раскроем в подынтегральном выражении скобки и применим табличные интегралы 3 и 6, получим:

$$\int e^x\left(3 - \frac{e^{-x}}{2\cos^2 x}\right)dx = 3\int e^x dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2 x} = 3e^x - \frac{1}{2}tgx + C$$

.

Пример 5. Найти $\int \frac{dx}{4+3x^2}$.

Решение. Приведём данный интеграл к табличному интегралу 9:

$$\int \frac{dx}{4+3x^2} = \int \frac{dx}{3\left(\frac{4}{3}+x^2\right)} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + x^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} arctg \frac{\sqrt{3}x}{2} + C =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6} arctg \frac{\sqrt{3}x}{2} + C.$$

2.2 Пример 1. Найти $\int e^{\frac{x}{2}} dx$.

Решение. Сделаем подстановку $x = 2t$, тогда $dx = 2tdt$. Следовательно,

$$\int e^{\frac{x}{2}} dx = \int e^t \cdot 2dt = 2\int e^t dt = 2e^t + C = 2e^{\frac{x}{2}} + C.$$

Пример 2. Найти $\int (3x-5)^7 dx$.

Решение. Сделаем подстановку $t = 3x-5$, тогда $dt = 3dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{3}$, следовательно,

$$\int (3x-5)^7 dx = \frac{1}{3}\int t^7 dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^8}{8} + C = \frac{(3x-5)^8}{24} + C.$$

Пример 3. Найти $\int x^2\left(3+2x^3\right)^4 dx$

Решение. Сделаем подстановку $t = 3+2x^3$, тогда $dt = 6x^2dx \Rightarrow x^2dx = \frac{dt}{6}$, следовательно,

$$\int x^2\left(3+2x^3\right)^4 dx = \frac{1}{6}\int t^4 dt = \frac{1}{6}\cdot\frac{t^5}{5} + C = \frac{\left(3+2x^3\right)^5}{30} + C.$$

Пример 4. Найти $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+2\sin x}}$.

Решение. Подстановка $t = 1+2\sin x$, тогда $dt = 2\cos x dx \Rightarrow \cos x dx = \frac{dt}{2}$, получим

$$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+2\sin x}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{(1+2\sin x)} + C.$$

Пример 5. Найти $\int \sin(4x+3)dx$.

Решение. Сделаем подстановку $t = 4x+3$, тогда $dt = 4dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{4}$, следовательно,

$$\int \sin(4x+3)dx = \frac{1}{4}\int \sin t dt = -\frac{1}{4}\cos t + C = -\frac{1}{4}\cos(4x+3) + C.$$

Пример 6. Найти $\int x^2 e^{x^3-2}dx$.

Решение. Сделаем подстановку $t = x^3 - 2$, тогда $dt = 3x^2dx \Rightarrow x^2dx = \frac{dt}{3}$, следовательно,

$$\int x^2 e^{x^3-2}dx = \frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3}e^t + C = \frac{1}{3}e^{x^3-2} + C.$$

2.3 Пример 1. Найти $\int (2x+1)e^{3x}dx$.

Решение. Данный интеграл относится к первой группе, поэтому

$$\int (2x+1)e^{3x}dx = \begin{bmatrix} u = 2x+1 \Rightarrow du = 2dx, \\ dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} -$$

$$-\frac{2}{3}\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C.$$

Пример 2. Найти $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$.

Решение. Данный интеграл относится ко второй группе, поэтому положим $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, \quad dv = \frac{dx}{x^3} \Rightarrow v = -\frac{1}{2x^2}$.

Тогда по формуле интегрирования по частям находим:

$$\int \frac{\ln x}{x^3}dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^3} + C.$$

Пример 3. Найти $\int (x-5)\cos x dx$.

Данный интеграл относится к первой группе, поэтому $u = x - 5 \Rightarrow du = dx$, $dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x$, по формуле интегрирования по частям имеем

$$\int (x-5)\cos x dx = (x-5)\sin x - \int \sin x dx = (x-5)\sin x + \cos x + C.$$

3. Порядок выполнения практической работы

3.1 Изучить краткие теоретические сведения.
3.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
3.3 Ответить на контрольные вопросы

4. Содержание отчёта

4.1Тема и цель работы.
4.2 Решение заданий.
4.3Ответы на контрольные вопросы.

5.Контрольные вопросы

5.1 Дайте определение первообразной функции.
5.2 Дайте определение неопределенного интеграла.
5.3 Сформулируйте свойства неопределенного интеграла.
5.4 В чем состоит метод замены переменного.
5.5 Сформулируйте правило нахождения неопределенного интеграла по частям.

6.Список справочной литературы

6.1 Богомолов Н.В., Самойленко П.И. Математика, Учебник. - М: Дрофа, 2016-395с.
6.2 Конспект теоретических занятий.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВАРИАНТ 1	ВАРИАНТ 2

№1. Вычислите интегралы функций: *1)* $\int(\frac{4}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+8)dx$ *2)* $\int\sqrt[4]{x^3}dx$ *№2. Вычислить методом замены переменных:* *1)* $\int sin^2 x\cdot cos\,x\,dx$ *2)* $\int 4x^3\cdot(x^4-5)^7dx$ *3)* $\int\frac{e^x}{e^x-3}dx$ *№3. Вычислить, интегрируя по частям:* *1)* $\int x\cdot e^{-3x}dx$ *2)* $\int(2x^2-4)\cdot e^{-4x}dx$	*№1. Вычислите интегралы функций:* *1)* $\int x^2\cdot(1+2x)dx$ *2)* $\int\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}dx$ *№2. Вычислить методом замены переменных:* *1)* $\int\sqrt{3x+5}\,dx$ *2)* $\int cos^7x\cdot sin\,x\,dx$ *3)* $\int\frac{5tgx}{cos^2x}dx$ *№3. Вычислить, интегрируя по частям:* *1)* $\int ln\,x\cdot(2x-3)\,dx$ *2)* $\int x^2\cos 4x\,dx$

ВАРИАНТ 3	ВАРИАНТ 4
№1. *Вычислите интегралы функций:* 1) $\int (x^4 - 8x^3 + 4x)dx$ 2) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$	№1. *Вычислите интегралы функций:* 1) $\int (x+3)^2\, dx$ 2) $\int \frac{3}{4\cdot\sqrt[4]{x}} dx$
№2. Вычислить методом замены переменных: 1) $\int cos^4 x \cdot sin\, x\, dx$ 2) $\int \frac{8x-2}{4x^2-2x} dx$ 3) $\int e^{3x^3} \cdot x^2\, dx$	*№2. Вычислить методом замены переменных:* 1) $\int \frac{1}{2x-9} dx$ 2) $\int e^{-\sin x} \cdot cos\, x\, dx$ 3) $\int \frac{e^x}{7e^x-2} dx$
№3. Вычислить, интегрируя по частям: 1) $\int x3^x dx$ 2) $\int (x^2-3) \cdot cos\frac{x}{3} dx$	*№3. Вычислить, интегрируя по частям:* 1) $\int x\, sin\, 8x\, dx$ 2) $\int (3x^2+2) \cdot sin\, 5x\, dx$

Практическое занятие №4

Тема: Вычисление определенного интеграла с помощью формулы Ньютона-Лейбница, методами подстановки и интегрирования по частям.

Цель работы: получить практические навыки вычисления определенных интегралов по формуле Ньютона-Лейбница, методом замены и по частям.

1. Краткие теоретические сведения

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная функция $y = f(x) \geq 0$.

Фигура, ограниченная графиком функции $y = f(x)$, прямыми линиями, $y = 0,\ x = a,\ x = b$ называется ***криволинейной трапецией***.

Определение. *Предел интегральной суммы* $\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ *при* $n \to \infty$ *называется* ***определённым интегралом*** *от функции* $y = f(x)$ *и обозначается* $\int\limits_a^b f(x)dx$, т.е.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i .$$

a - нижний предел интегрирования,

b - верхний предел интегрирования,

$f(x)$ - подынтегральная функция,

$f(x)dx$ - подынтегральное выражение;

$[a;b]$ - отрезок интегрирования.

Из определения определённого интеграла вытекает его геометрический смысл: *определённый интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции.*

Свойства определённого интеграла.

Определённый интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определённых интегралов от каждого слагаемого.

$$\int\limits_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)dx .$$

Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла.

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

При перестановке местами пределов интегрирования определённый интеграл меняет свой знак на противоположный.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Определённый интеграл с одинаковыми пределами равен нулю.

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Отрезок интегрирования можно разбивать на части.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

где $a \prec c \prec b$.

Формула Ньютона - Лейбница. Основные методы вычисления определённого интеграла.

Вычисляют определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$ по ***формуле Ньютона - Лейбница:***

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$ **,у**

где $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$.

Формула Ньютона - Лейбница применяется для вычисления определённого интеграла во всех случаях, когда может быть найдена первообразная функция $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$.

Для вычисления определённого интеграла от функции $f(x)$ по формуле Ньютона - Лейбница необходимо сначала найти первообразную $F(x)$, поэтому для вычисления определённого интеграла применяют те же приёмы, что и для нахождения неопределённого интеграла.

Замена переменной в определённом интеграле.

При вычислении определённого интеграла $\int_a^b f(x)dx$ способом *замены переменной* данный интеграл с помощью подстановки $x=\varphi(t)$ или $t=\psi(x)$ преобразуется в другой определённый интеграл с новой переменной интегрирования t и являющийся табличным.

При этом старые пределы интегрирования $x_1=a$ и $x_2=b$ заменяются новыми пределы $t_1=\psi(a),\quad t_2=\psi(b)$.

Формула замены переменной в определённом интеграле выглядит следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{t_1}^{t_2} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

В данной формуле предполагается, что функции $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[t_1;t_2]$, а функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на отрезке $[t_1;t_2]$.

Замечание. В отличие от интегрирования методом замены переменной в неопределённом интеграле при таком же способе интегрирования в интеграле определённом к старой переменной интегрирования не возвращаются.

Интегрирование по частям в определённом интеграле.

Теорема. *Если функции* $u=u(x)$ *и* $v=v(x)$ *имеют непрерывные производные на отрезке* $[a;b]$, *то имеет место формула интегрирования по частям в определённом интеграле*

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu.$$

Замечание 1. При вычислении определённого интеграла по частям используются те же рекомендации при выборе функции u и выражения dv, что и при применении данного метода для неопределённого интеграла.

Замечание 2. При вычислении определённого интеграла по частям пределы интегрирования не пересчитываются.

2. Методика решения типовых задач

2.1 Непосредственное интегрирование.

Пример 1. Вычислить определённый интеграл $\int_1^2 5x^4dx$.

Решение. Применяя свойство 2 определённого интеграла, табличный интеграл 1 и формулу Ньютона - Лейбница, имеем:

$$\int_1^2 5x^4dx = 5\int_1^2 x^4dx = 5\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_1^2 = x^5\Big|_1^2 = 2^5 - 1^5 = 32 - 1 = 31.$$

Пример 2. Вычислить $\int_0^4\left(3x - e^{\frac{x}{4}}\right)dx$.

Решение. Последовательно применим свойства 1 и 2 определённого интеграла, табличный интеграл и формулу Ньютона - Лейбница, получим:

$$\int_0^4\left(3x - e^{\frac{x}{4}}\right)dx = 3\int_0^4 xdx - \int_0^4 e^{\frac{x}{4}}dx = \frac{3x^2}{2}\Big|_0^4 - 4e^{\frac{x}{4}}\Big|_0^4 = \frac{3\cdot 4^2}{2} - 4\cdot e^{\frac{4}{4}} + 4e^{\frac{0}{4}} = 28 - 4e$$

Пример 3. Вычислить $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1 - x\sin x}{x}dx$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию, разделив почленно числитель на знаменатель, применим свойство определённого интеграла 1 и табличные интегралы, получим

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1 - x\sin x}{x}dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{x} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin xdx = \ln x\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \cos x\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \ln\pi - \ln\frac{\pi}{2} +$$

$$\cos\pi - \cos\frac{\pi}{2} = \ln 2 - 1$$

а. *Замена переменного*:

Пример 4. Вычислить $\int_0^5\frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$.

Решение. Сделаем замену $t = \sqrt{1+3x} \Rightarrow x = \frac{t^2 - 1}{3},\quad dx = \frac{2t}{3}dt$. Пересчитаем пределы интегрирования:

$$t_1 = \sqrt{1+3\cdot 0} = 1, \quad t_2 = \sqrt{1+3\cdot 5} = 4,$$

получаем

$$\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}} = \int_1^4 \frac{\frac{t^2-1}{3}\cdot\frac{2t}{3}dt}{t} = \frac{2}{9}\int_1^4 \left(t^2-1\right)dt = \frac{2}{9}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_1^4 = \frac{2}{9}\left(\frac{4^3}{3}-4\right) -$$

$$\frac{2}{9}\left(\frac{1^3}{3}-1\right) = \frac{2}{9}\cdot\frac{52}{3} + \frac{4}{27} = \frac{108}{27} = 4.$$

Пример 5. Вычислить $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1+tgx}}{\cos^2 x}dx$.

Решение. Сделаем замену $t = 1+tgx \Rightarrow dt = \left(1+tgx\right)' dx = \frac{dx}{\cos^2 x}$ и найдём новые пределы интегрирования

$$t_1 = 1+tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1-1 = 0, \quad t_2 = 1+tg\frac{\pi}{4} = 1+1 = 2,$$

тогда получим

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1+tgx}}{\cos^2 x}dx = \int_0^2 \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^2 = \frac{2}{3}\sqrt{2^3} - 0 = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

b. *Интегрирование по частям:*

Пример 8. Вычислить $\int_1^e x\ln xdx$.

Решение. Данный интеграл относится ко второй группе, поэтому положим $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, \quad dv = xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$, тогда имеем:

$$\int_1^e x\ln xdx = \frac{x^2}{2}\ln x\Bigg|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x^2\cdot\frac{dx}{x} = \frac{e^2}{2}\ln e - \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{2}\int_1^e xdx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Bigg|_1^e =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(e^2+1\right).$$

Пример 9. Вычислить $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}(2-x)\sin 3x dx$.

Решение. Данный интеграл относится к первой группе интегралов, поэтому примем $u=2-x \Rightarrow du=-dx, \quad dv=\sin 3x dx \Rightarrow v=-\frac{1}{3}\cos 3x$, тогда получим:

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}(2-x)\sin 3x dx=-\frac{1}{3}(2-x)\cos 3x\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{6}}-\frac{1}{3}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}\cos 3x dx=-\frac{1}{3}\left(2-\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{2}+$$

$$\frac{1}{3}(2-0)\cos 0-\frac{1}{9}\sin 3x\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{6}}=0+\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{9}\sin 0=\frac{2}{3}-\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$$

3. Порядок выполнения практической работы

3.1 Изучить краткие теоретические сведения.
3.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
3.3 Ответить на контрольные вопросы

4. Содержание отчёта

4.1 Тема и цель работы.
4.2 Решение заданий.
4.3 Ответы на контрольные вопросы.

5. Контрольные вопросы

5.1 Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
5.2 Запишите свойства определенного интеграла.
5.3 Запишите формулу для вычисления определенного интеграла по частям.

6.Список справочной литературы

6.1 Богомолов Н.В., Самойленко П.И. Математика, Учебник. - М: Дрофа, 2016-395с.
6.2 Конспект теоретических занятий.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВАРИАНТ №1	ВАРИАНТ №2
№1. Вычислить интегралы: $a)\int_{-1}^{1}(6x^2-2x-5)dx$ $б)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{3\sin x+1}\cos x dx$ $в)\int_{1}^{e}x^3\ln x dx$	№1. Вычислить интегралы: $a)\int_{1}^{9}\frac{x-1}{\sqrt{x}}dx$ $б)\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin xdx}{3-\cos x}$ $в)\int_{0}^{5}xe^{x}dx$
ВАРИАНТ №3	**ВАРИАНТ №4**
№1. Вычислить интегралы: $a)\int_{-1}^{1}(2x-3x^2)dx$ $б)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x dx}{2+\sin x}$ $в)\int_{1}^{e^2}\sqrt{x}\ln x dx$	№1. Вычислить интегралы: $a)\int_{1}^{4}(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})dx$ $б)\int_{0}^{1}(e^{x}-4)^{4}e^{x}dx$ $в)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\sin xdx$

Практическое занятие №5

Тема: Применение определенного интеграла к решению геометрических и физических задач.

Цель работы: получить практические навыки вычисления площадей плоских фигур и объемов тел вращения.

1. Краткие теоретические сведения

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная функция $y = f(x) \geq 0$.

Фигура, ограниченная графиком функции $y = f(x)$, прямыми линиями, $y=0,\ x=a,\ x=b$ называется ***криволинейной трапецией***.

Определение. *Предел интегральной суммы* $\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ *при* $n \to \infty$ *называется* ***определённым интегралом*** *от функции* $y = f(x)$ *и обозначается* $\int\limits_a^b f(x)dx$, т.е.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

a - нижний предел интегрирования,

b - верхний предел интегрирования,

$f(x)$ - подынтегральная функция,

$f(x)dx$ - подынтегральное выражение;

$[a;b]$ - отрезок интегрирования.

Из определения определённого интеграла вытекает его геометрический смысл: *определённый интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции.*

Свойства определённого интеграла.

Определённый интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определённых интегралов от каждого слагаемого.

$$\int\limits_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)dx.$$

Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла.

$$\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx.$$

При перестановке местами пределов интегрирования определённый интеграл меняет свой знак на противоположный.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$$

Определённый интеграл с одинаковыми пределами равен нулю.

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Отрезок интегрирования можно разбивать на части.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

где $a \prec c \prec b$.

Формула Ньютона - Лейбница. Основные методы вычисления определённого интеграла.

Вычисляют определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$ по ***формуле Ньютона - Лейбница:***

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$ **,у**

где $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$.

Формула Ньютона - Лейбница применяется для вычисления определённого интеграла во всех случаях, когда может быть найдена первообразная функция $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$.

Для вычисления определённого интеграла от функции $f(x)$ по формуле Ньютона - Лейбница необходимо сначала найти первообразную $F(x)$, поэтому для вычисления определённого интеграла применяют те же приёмы, что и для нахождения неопределённого интеграла.

Замена переменной в определённом интеграле.

При вычислении определённого интеграла $\int_a^b f(x)dx$ способом *замены переменной* данный интеграл с помощью подстановки $x = \varphi(t)$ или $t = \psi(x)$ преобразуется в другой определённый интеграл с новой переменной интегрирования t и являющийся табличным.

При этом старые пределы интегрирования $x_1 = a$ и $x_2 = b$ заменяются новыми пределы $t_1 = \psi(a), \quad t_2 = \psi(b)$.

Формула замены переменной в определённом интеграле выглядит следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

В данной формуле предполагается, что функции $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[t_1; t_2]$, а функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на отрезке $[t_1; t_2]$.

Замечание. В отличие от интегрирования методом замены переменной в неопределённом интеграле при таком же способе интегрирования в интеграле определённом к старой переменной интегрирования не возвращаются.

Интегрирование по частям в определённом интеграле.

Теорема. *Если функции* $u = u(x)$ *и* $v = v(x)$ *имеют непрерывные производные на отрезке* $[a; b]$, *то имеет место формула интегрирования по частям в определённом интеграле*

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Замечание 1. При вычислении определённого интеграла по частям используются те же рекомендации при выборе функции u и выражения dv, что и при применении данного метода для неопределённого интеграла.

Замечание 2. При вычислении определённого интеграла по частям пределы интегрирования не пересчитываются.

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой y=f(x), двумя прямыми x=a и x=b и отрезком a≤x≤b оси абсцисс, вычисляется по формуле:

$S = \int_a^b f(x)dx,$, если f(x)≥0 на отрезке от a до b.

$S = -\int_a^b f(x)dx$, если f(x)≤0 на отрезке от a до b.

$S=\int\limits_a^b |f(x)|dx$, если f(x)конечное число раз меняет знак на отрезке от а до b.

$S=\int\limits_a^b (f(x)-g(x))dx$, если площадь фигуры, ограничена двумя непрерывными кривыми y=f(x) и y=g(x) и двумя прямыми x=a и x=b, где f(x) ≥ g(x) на отрезке от а до b.

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой y=f(x), осью абсцисс и двумя прямыми x=a и x=b (a‹b), находится по формуле: $V_x=\pi\int\limits_a^b [f(x)]^2 dx,$

аналогично, **объем тела вращения вокруг оси Оу** криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой x=φ(y), осью ординат и двумя прямыми y =d и y=d (c‹d), находится по формуле: $V_y=\pi\int\limits_c^d [\varphi(y)]^2 dy,$

2. Методика решения типовых задач

2.1 Непосредственное интегрирование.

Пример 1. Вычислить определённый интеграл $\int\limits_1^2 5x^4 dx$.

Решение. Применяя свойство 2 определённого интеграла, табличный интеграл 1 и формулу Ньютона - Лейбница, имеем:

$$\int\limits_1^2 5x^4dx=5\int\limits_1^2 x^4dx=5\cdot\left.\frac{x^5}{5}\right|_1^2=\left.x^5\right|_1^2=2^5-1^5=32-1=31.$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_0^4\left(3x-e^{\frac{x}{4}}\right)dx$.

Решение. Последовательно применим свойства 1 и 2 определённого интеграла, табличный интеграл и формулу Ньютона - Лейбница, получим:

$$\int\limits_0^4\left(3x-e^{\frac{x}{4}}\right)dx=3\int\limits_0^4 xdx-\int\limits_0^4 e^{\frac{x}{4}}dx=\left.\frac{3x^2}{2}\right|_0^4-\left.4e^{\frac{x}{4}}\right|_0^4=\frac{3\cdot4^2}{2}-4\cdot e^{\frac{4}{4}}+4e^{\frac{0}{4}}=28-4e$$

Пример 3. Вычислить $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1-x\sin x}{x}dx$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию, разделив почленно числитель на знаменатель, применим свойство определённого интеграла 1 и табличные интегралы, получим

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1-x\sin x}{x}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{x}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin xdx=\ln x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\ln\pi-\ln\frac{\pi}{2}+$$

$$\cos\pi-\cos\frac{\pi}{2}=\ln 2-1$$

а. *Замена переменного*:

Пример 4. Вычислить $\int_{0}^{5}\frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$.

Решение. Сделаем замену $t=\sqrt{1+3x}\Rightarrow x=\frac{t^2-1}{3},\quad dx=\frac{2t}{3}dt$. Пересчитаем пределы интегрирования:

$$t_1=\sqrt{1+3\cdot 0}=1,\quad t_2=\sqrt{1+3\cdot 5}=4,$$

получаем

$$\int_{0}^{5}\frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}=\int_{1}^{4}\frac{\frac{t^2-1}{3}\cdot\frac{2t}{3}dt}{t}=\frac{2}{9}\int_{1}^{4}\left(t^2-1\right)dt=\frac{2}{9}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_{1}^{4}=\frac{2}{9}\left(\frac{4^3}{3}-4\right)-$$

$$\frac{2}{9}\left(\frac{1^3}{3}-1\right)=\frac{2}{9}\cdot\frac{52}{3}+\frac{4}{27}=\frac{108}{27}=4.$$

Пример 5. Вычислить $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{1+tgx}}{\cos^2 x}dx$.

Решение. Сделаем замену $t=1+tgx\Rightarrow dt=\left(1+tgx\right)'dx=\frac{dx}{\cos^2 x}$ и найдём новые пределы интегрирования

$$t_1=1+tg\left(-\frac{\pi}{4}\right)=1-1=0,\quad t_2=1+tg\frac{\pi}{4}=1+1=2,$$

тогда получим

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{1+tgx}}{\cos^2 x}dx=\int_{0}^{2}\sqrt{t}dt=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{2}=\frac{2}{3}\sqrt{2^3}-0=\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

b. *Интегрирование по частям:*

Пример 8. Вычислить $\int_1^e x \ln x dx$.

Решение. Данный интеграл относится ко второй группе, поэтому положим

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, \quad dv = xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$, тогда имеем:

$$\int_1^e x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x^2 \cdot \frac{dx}{x} = \frac{e^2}{2} \ln e - \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(e^2 + 1\right).$$

Пример 9. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2 - x) \sin 3x dx$.

Решение. Данный интеграл относится к первой группе интегралов, поэтому примем $u = 2 - x \Rightarrow du = -dx, \quad dv = \sin 3x dx \Rightarrow v = -\frac{1}{3} \cos 3x$, тогда получим:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2 - x) \sin 3x dx = -\frac{1}{3} (2 - x) \cos 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx = -\frac{1}{3} \left(2 - \frac{\pi}{6}\right) \cos \frac{\pi}{2} +$$

$$\frac{1}{3}(2 - 0) \cos 0 - \frac{1}{9} \sin 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = 0 + \frac{2}{3} - \frac{1}{9} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{9} \sin 0 = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}.$$

2.4 Пример 10. *Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями*

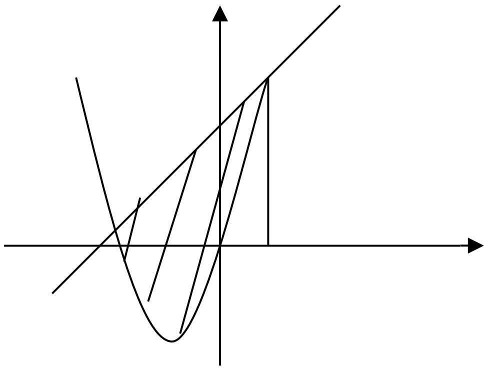
$y = x^2 - 4,\ x\ y = 4$

$y = x - 4$

Решение.

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x \\ y = x + 4 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -4, x_2 = 1$$

$$S = \int_{-4}^{1} (x + 4 - x^2 - 4x)dx = \int_{-4}^{1} (4 - 3x - x^2)dx = 4x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-4}^{1} = \left(4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(-16 - \frac{48}{2} + \frac{64}{3}\right) = \frac{125}{6}$$



2.5 Пример 11. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $y = \frac{4}{x}$, прямыми х=3, х=12 и осью абсцисс.

Решение. Пользуясь формулой для вычисления объема, находим

$$V_x = \pi \int_{3}^{12} \left[\frac{4}{x}\right]^2 dx = 16\pi \int_{3}^{12} \frac{dx}{x^2} = -16\pi \frac{1}{x}\Big|_{3}^{12} = -16\pi\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{3}\right) = 4\pi \text{ (куб.ед.)}$$

3. Порядок выполнения практической работы

3.1 Изучить краткие теоретические сведения.
3.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
3.3 Ответить на контрольные вопросы

4. Содержание отчёта

4.1 Тема и цель работы.
4.2 Решение заданий.
4.3 Ответы на контрольные вопросы.

5. Контрольные вопросы

5.1 Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
5.2 Запишите формулу для вычисления площади плоской фигуры при помощи определенного интеграла.
5.3 Запишите формулу для вычисления объема тела вращения.

6.Список справочной литературы

6.1 Богомолов Н.В., Самойленко П.И. Математика, Учебник. - М: Дрофа, 2016-395с.
6.2 Конспект теоретических занятий.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВАРИАНТ №1	**ВАРИАНТ №2**
№1. Вычислить интегралы: $а)\int_{-1}^{1}(6x^2-2x-5)dx$ $б)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{3\sin x+1}\cos xdx$ $в)\int_{1}^{e}x^3\ln xdx$ №2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. $y=2x^2,$ $y=3x+2.$ Сделать чертеж. №3. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=\sqrt{x-2}$, прямыми x=2, x=4 и осью абсцисс. Сделать чертеж. №4 Вычислить путь, пройденный телом. $V=3t^2+1,$ $t_1=0,\ \ t_2=4$	№1. Вычислить интегралы: $а)\int_{1}^{9}\frac{x-1}{\sqrt{x}}dx$ $б)\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin xdx}{3-\cos x}$ $в)\int_{0}^{5}xe^{x}dx$ №2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. $y=-x^2-2,$ $y=-4x+1.$ Сделать чертеж. №3. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=\frac{3}{x}$, прямыми x=3, x=6 и осью абсцисс. Сделать чертеж. №4 Вычислить путь, пройденный телом. $V=2t^2+t,$ $t_1=1,\ \ t_2=3.$
ВАРИАНТ №3	**ВАРИАНТ №4**
№1. Вычислить интегралы:	№1. Вычислить интегралы:

$a)\int_{-1}^{1}(2x-3x^2)dx$ $б)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos xdx}{2+\sin x}$ $в)\int_{1}^{e^2}\sqrt{x}\ln xdx$ №2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. $y=x^2-5x,$ $y=x-5.$ Сделать чертеж. №3. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=-\frac{2}{x}$, прямыми х=1, х=2 и осью абсцисс. Сделать чертеж. №4 Вычислить путь, пройденный телом. $V=6t+4,$ $t_1=2,\ \ t_2=3.$.	$a)\int_{1}^{4}(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})dx$ $б)\int_{0}^{1}(e^x-4)^4e^xdx$ $в)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\sin\ \ xdx$ №2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. $y=x^2+6,$ $y=-6x+1.$ Сделать чертеж. №3. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох криволинейной трапеции, ограниченной прямой $y=3x-1$, прямыми х=1, х=3 и осью абсцисс. Сделать чертеж. №4. Вычислить путь, пройденный телом. $V=t^2-t+3,$ $t_1=0,\ \ t_2=5.$

Практическое занятие №6

Тема: Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными и линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Цель работы: сформировать навыки решения дифференциальных уравнений различных видов. Научиться находить общее и частное решение.

1. **Краткие теоретические сведения.**

1.Чтобы решить дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными $f_1(x)g_1(y)=f_2(x)g_2(y)$ *надо :*

- *разделить переменные*

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{g_2(y)}{g_1(y)}$$

- *взять интеграл от левой и правой части*

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx = \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}\,dy$$

При решении линейных уравнений используют метод вариации постоянной (смотри решение примеров)

2. Методика решения типовых задач.

2.1 Задача 1. Решить уравнение $\cos x\cos y\,dx=\sin x\sin y\,dy$

Решение

$$\cos x\cos y\,dx = \sin x\sin y\,dy$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{\sin y}{\cos y}\,dy$$

$$\ln|\sin x| + c = -\ln|\cos y|$$

$$\ln|c*\sin x| = \ln|\cos y|^{-1}$$

$$\frac{1}{\cos y} = c*\sin x$$

$\cos y = \dfrac{1}{c*\sin x}$ - *общее решение дифференциального уравнения.*

2.2 Задача 2. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения $(1+y)dx=(1-x)dy,\ y=3$ *при* $x=-2$

Решение

$$\int \frac{dx}{1-x} = \int \frac{dx}{1+y}$$

$$-\ln|1-x|| + c = \ln|1+y|$$

$$\ln|c|*\sin x| = \ln|1+y|$$

$$\ln\left|\frac{c}{1-x}\right| = \ln|1+y|$$

$1+y=\dfrac{c}{1-x}$ - *общее решение дифференциального уравнения.*

Найдём «с»

$$1+3=\frac{c}{1+2} \Rightarrow c=1$$

$1+y=\frac{12}{1-x}$ - *частное решение дифференциального уравнения.*

2.3 Задача 3. Решить уравнение $y'-y*ctgx=\frac{1}{\sin x}$

Решение.

Воспользуемся подстановкой

$$y = u * v$$

$$y' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' - uvctgx = \frac{1}{\sin x}$$

$$v(u' - uctgx) + uv' = \frac{1}{\sin x}$$

$$\begin{cases} u' - uctgx = 0 \\ uv' = \frac{1}{\sin x} \end{cases}$$

1) $u' - uctgx = 0$

$$\frac{du}{dx} = uctgx$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$\ln |u| = \ln |\sin x|$$

$$u = \sin x$$

2) $uv = \frac{1}{\sin x}$

$$\sin x \frac{dv}{dx} = \frac{1}{\sin x}$$

$$\int dv = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx$$

$$v = -ctgx + c$$

$y=\sin x(c-ctgx)$ - *общее решение дифференциального уравнения.*

3.Порядок выполнения практической работы.

3.1Изучить краткие теоретические сведения.
3.2 Решить задания своего варианта. (Приложение)
3.3Ответить на контрольные вопросы.

4.Содержание отчёта

4.1 Тема и цель занятия.
4.2 Решение заданий.
4.3 Ответы на контрольные вопросы.

5.Контрольные вопросы

5.1 В чём состоит задача Коши?
5.2 Какая подстановка используется при решении линейных уравнений?

6.Список справочной литературы

6.1. Богомолов Н.В., Самойленко П.И. Математика. Учебник. - М: Дрофа, 2011-395с.
6.2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике. Учебное пособие. – М: Дрофа, 2011-204с.
6.3. Конспект лекций.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1 вариант **2 вариант**

Решить дифференциальные уравнения

1 вариант

1) $3y\,dx-(1+x)\,dy=0$

2) $(1+x^2)\,dy-2xy\,dx=0$

3) $(1+x)y\,dx+(1-y)x\,dy=0$

y=1 при x=1

4) $y'-y=\frac{1+x^2}{x}*e^x$

5) $y'-y\,ctg\,x=\sin x$

2 вариант

1) $y\,dx+(1-y)x\,dy=0$

2) $(1+x^2)\,dy-(xy+x)\,dx=0$

3) $y^2\,dx=e^x\,dy$

y=1 при x=0

4) $y'+\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{x}$

5) $y'+\frac{y}{x}=\frac{e^{-x}}{x}$

3 вариант **4 вариант**

Решить дифференциальные уравнения

3 вариант

1) $3y\,dy-(1+y)\,dx=0$

2) $x(y^2+1)\,dx+(x^2y-y)\,dy=0$

3) $\cos x\,dy-(y+1)\sin x\,dx=0$

$y=\frac{\pi}{4}$ *при* $x=\frac{\pi}{4}$

4) $y'-\frac{2y}{x}=-\frac{3}{x^2}$

5) $y'-y\,tg\,x=\frac{1}{\cos x}$

4 вариант

1) $(3+x)\,dy-(2+y)\,dx=0$

2) $(y-x^2y)\,dy+(x+xy^2)\,dx=0$

3) $(x+3)\,dy-(y-2)\,dx=0$

y=1 при x=1

4) $y'+\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$

5) $y'-\frac{2y}{x}=x^2e^x$

Практическое занятие №7

Тема: Решение линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Цель работы: получить практические навыки решения линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

1. Краткие теоретические сведения

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Линейными однородными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

где
a, b, c - числа, называемые коэффициентами уравнения,
y - неизвестная функция.

Чтобы решить уравнение

$$ay'' + by' + cy = 0$$

нужно составить и решить характеристическое уравнение

$$ak^2 + bk + c = 0.$$

Общее решение дифференциального уравнения строится в зависимости от корней характеристического уравнения, а именно:

1. Если корни характеристического уравнения действительны и различны $k_1 \neq k_2 \quad (D \succ 0)$, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x},$$

где
$k_1, \quad k_2$ -корни характеристического уравнения,
$C_1, \quad C_2$- произвольные постоянные.

2. Если характеристическое уравнение имеет два одинаковых действительных корня $k_1 = k_2 \quad (D = 0)$, , то решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = e^{kx}\left(C_1 x + C_2\right).$$

3. Если корни характеристического уравнения являются комплексно сопряжёнными $k_1 = \alpha + \beta i, \quad k_2 = \alpha - \beta i \quad (D \prec 0)$, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$$

2. Методика решения типовых задач

2.1 Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y' - 2y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + k - 2 = 0$. Его корни $k_1 = -2, \quad k_2 = 1,$. Т.к. корни действительные и различные, то общее решение записывается в виде

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}.$$

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 4 = 0$ имеет равные корни

$$k_1 = k_2 = 2,$$

следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

Пример 3. Найти частное решение уравнения $y'' + 2y' + 5y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y\big|_{x=0} = 0$, $y'\big|_{x=0} = 1$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 2k + 5 = 0$ имеет комплексно-сопряжённые корни: $k_1 = -1 + 2i, \quad k_2 = -1 - 2i$, Таким образом, общее решение записывается в виде

$$\mathrm{y} = \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\left(\mathrm{A}\cos 2\mathrm{x} + \mathrm{B}\sin 2\mathrm{x}\right).$$

Найдём частное решение, которое удовлетворяет заданным начальным условиям. Из первого начального условия следует, что

$$0 = \mathrm{e}^0(\mathrm{A}\cos 0 + \mathrm{B}\sin 0) \Rightarrow \mathrm{A}\cos 0 = 0 \Rightarrow \mathrm{A} = 0.$$

Найдём y':

$$y' = -e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + e^{-x}(2B\cos 2x - 2A\sin 2x) =$$
$$= e^{-x}(2B\cos 2x - 2A\sin 2x - A\cos 2x - B\sin 2x) =$$
$$= e^{-x}((2B - A)\cos 2x + (-A - B)\sin 2x).$$

и подставим во второе начальное условие, получим

$$1 = (2B - A)\cos 0 + (-2A - B)\sin 0,$$

откуда, учитывая, что $\mathrm{A} = 0$, получим

$$2B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, искомое частное решение имеет вид

$$y = \frac{1}{2}e^{-x}\sin 2x.$$

Пример 4. Найти интегральную кривую дифференциального уравнения $y'' + 2y' + 2y = 0$, проходящую через точку M(0;1) и касающуюся в этой точке прямой y=x+1.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + 2k + 2 = 0$; его корни $x_1 = 1 + i$ и $x_2 = 1 - i$ являются комплексно-сопряжёнными, поэтому уравнение множества интегральных кривых запишется следующим образом

$$y = e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x).$$

Найдём уравнение искомой интегральной кривой, для чего в равенства

$$y = e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x), y' = e^{-x}((C_2 - C_1)\cos x + (C_2 + C_1)\sin x)$$

подставим значение y=1 и углового коэффициента касательной $y' = k = 1$ в точке x=0. В результате получим систему уравнений для определения постоянных C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 - C_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 1, \quad C_2 = 2.$$

Подставив эти значения в общее решение, получим уравнение искомой интегральной кривой

$$y = e^{-x}(\cos x + 2\sin x).$$

3. Порядок выполнения практической работы

3.1 Изучить краткие теоретические сведения.
3.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
3.3 Ответить на контрольные вопросы

4. Содержание отчёта

4.1 Тема и цель работы.
4.2 Решение заданий.
4.3 Ответы на контрольные вопросы.

5. Контрольные вопросы

5.1 Дайте определение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
5.2 Что называется характеристическим уравнением?
5.3 Какие возможны случаи для решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?

6.Список справочной литературы

6.1 Богомолов Н.В., Самойленко П.И. Математика, Учебник. - М: Дрофа, 2016-395с.
6.2 Конспект теоретических занятий.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВАРИАНТ №1	ВАРИАНТ №2
№1. Найти общее решение дифференциальных уравнений: 1) $y'' - 7y' + 10y = 0$ 2) $y'' - 5y' = 0$ 3) $y'' - 9y = 0$ 4) $y'' - 8y' + 16y = 0$ 5) $y'' - 6y' + 25y = 0$	№1. Найти общее решение дифференциальных уравнений: 1) $y'' + y' - 6y = 0$ 2) $y'' + 3y' = 0$ 3) $y'' - 4y = 0$ 4) $y'' - 6y' + 9y = 0$ 5) $y'' - 2y' + 5y = 0$

№2. Найти частное решение дифференциального уравнения, отвечающее заданным начальным условиям: $y'' - 2y' - 3y = 0$, y=8 при x=0 и $y' = 0$	№2. Найти частное решение дифференциального уравнения, отвечающее заданным начальным условиям: $y'' + y' - 20y = 0$, $y = \frac{9}{5}$ при x=0 и $y' = 0$
ВАРИАНТ №3	**ВАРИАНТ №4**
№1. Найти общее решение дифференциальных уравнений: 1) $y'' - 8y' + 15y = 0$ 2) $y'' - y' = 0$ 3) $y'' - 25y = 0$ 4) $y'' + 2y' + y = 0$ 5) $y'' - 4y' + 7y = 0$ №2. Найти частное решение дифференциального уравнения, отвечающее заданным начальным условиям: $y'' + 8y' + 16y = 0$, y=1 при x=0 и $y' = 1$	№1. Найти общее решение дифференциальных уравнений: 1) $y'' + 5y' + 6y = 0$ 2) $y'' + 2y' = 0$ 3) $y'' - y = 0$ 4) $y'' - 4y' + 4y = 0$ 5) $y'' - 6y' + 13y = 0$ №2. Найти частное решение дифференциального уравнения, отвечающее заданным начальным условиям: $y'' - 10y' + 25y = 0$, y=2 при x=0 и $y' = 8$

Практическое занятие №8

Тема: Исследование на сходимость рядов с положительными членами по признаку Даламбера и знакопеременных рядов по признаку Лейбница.

Цель работы: получить практические навыки использования признаков Даламбера, Коши, Лейбница для определения сходимости или расходимости числовых рядов.

1. Краткие теоретические сведения

Признак Даламбера:

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

Если q>1, то ряд расходится.
Если q<1, то ряд сходится.

Признак Коши (радикальный):

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$.

Если q>1, то ряд расходится.
Если q<1, то ряд сходится.

Признак Лейбница (для знакочередующегося ряда):

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$

Ряд сходится, если выполняются два условия:

1) элементы ряда по абсолютной величине монотонно убывают;
2) предел общего члена ряда равен нулю.

Степенным рядом называется ряд вида

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ или $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

Чтобы найти интервал сходимости степенного ряда надо:

1) применить признак Даламбера или Коши к ряду, составленному из модулей;
2) исследовать сходимость ряда на концах интервала.

2. Методика решения типовых задач

2.1 Задача 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$

Решение.

$$a_n = \frac{n}{3^n}, \quad a_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)3^n}{3^{n+1}n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3}$$

Т. к. $\frac{1}{3} < 1$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ *сходится по признаку Даламбера.*

2.2 Задача 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$

Решение.

$$a_n = \frac{n!}{10^n}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{10^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,10^n}{10^{n+1}\,n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{10} = \infty$$

Т. к. $\infty > 1$, *то ряд расходится по признаку Даламбера.*

2.3 Задача 3. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{3}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^3 + \dots + \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^n + \dots$$

Решение

$$a_n=\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}=2$$

Т.к. $2>1$, *то ряд расходится по признаку Коши.*

2.4 Задача 4. Пользуясь признаком Лейбница, исследовать на сходимость ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\ldots+(-1)^{n}\frac{1}{n^2+1}+\ldots$

Решение.

Так как члены данного ряда по абсолютной величине монотонно убывают $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{5}>\ldots$ и общий член ряда стремится к нулю $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}=0$, то в силу признака Лейбница ряд сходится.

2.5 Задача 5.Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

$a)\ 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots$

$б)\ 1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\ldots$

Решение.

а) Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots$

По признаку Даламбера этот ряд сходится, т.к.

$$1=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)}\cdot\frac{n}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$$

Таким образом ряд расходится абсолютно.

б)Ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда

$1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\ldots$ - *расходится как общегармонический (т.к.* $\frac{1}{3}<1$*).*

Следовательно, исходный ряд не является абсолютно сходящимся.

Исследуем его на условную сходимость.

Ряд $1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\ldots$ *сходится (по признаку Лейбница), так как*

$$1>\frac{1}{\sqrt[3]{2}}>\frac{1}{\sqrt[3]{3}}>\ldots\quad\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=0$$

Итак, данный ряд сходится условно.

3. Порядок выполнения практической работы

3.1 Изучить краткие теоретические сведения.
3.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
3.3 Ответить на контрольные вопросы

4. Содержание отчёта

4.1 Тема и цель работы.
4.2 Решение заданий.
4.3 Ответы на контрольные вопросы.

5. Контрольные вопросы

5.1 Какой признак применим для знакочередующихся рядов?
5.2 Какой ряд называется абсолютно сходящимся?
5.3 Какой ряд называется условно сходящимся?

6.Список справочной литературы

6.1 Богомолов Н.В., Самойленко П.И. Математика, Учебник. - М: Дрофа, 2016-395с.
6.2 Конспект теоретических занятий.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВАРИАНТ №1	ВАРИАНТ №2
№1.Исследовать на сходимость ряды 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ 4) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{2^n}$	№1. Исследовать на сходимость ряды 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n^2}{5^n}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2n+1}$

ВАРИАНТ №3	ВАРИАНТ №4
№1.Исследовать на сходимость ряды 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3 \cdot 2^n}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{n^2}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n}$	№1 Исследовать на сходимость ряды 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{5^n}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{4n-1} \right)^{n^2}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

Практическое занятие №9

Тема: Решение задач по теории вероятностей.

Цель занятия: отработать навык решения задач по данной теме.

2. Перечень справочной литературы:

2.1. Конспект

2.2. Башмаков М.И. Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия: Учебник для СПО.- М.: Академия, 2017*(Основное печатное издание – ОПИ 1.).*

2.3 Башмаков М.И. Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Сборник задач профильной направленности: Учебное пособие для СПО.- М.: Академия, 2018.- 208с. *(Основное печатное издание – ОПИ 2.).*

3. Краткие теоретические сведения:

1. Элементы комбинаторики.

Размещения – упорядоченные выборки k элементов из n $(k \le n)$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Перестановки – выборки, которые отличаются только порядком расположения элементов.

$$\mathrm{P}_n = n! \quad \left(\mathrm{P}_n = A_r^n\right)$$

Сочетания – неупорядоченные выборки k элементов из n элементов $(k \le n)$. $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ или $C_n^k = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$

Бином Ньютона: $(a+b)^n = C_n^o a^n b^o + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + C_n^n a^o b^n$, где C_n^k – биноминальные коэффициенты.

2. Элементы теории вероятности.

Пусть A – событие, его вероятность, $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \dfrac{m}{n}$, где m – число исходов благоприятствующих событию A, n – число всех исходов.

Если A и B несовместные события, то:

$$\mathrm{P}(A+B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$$

$$\mathrm{P}(A \cdot B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$$

Если A и B – произвольные события, то:

$$\mathrm{P}(A+B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB)$$

$$\mathrm{P}(A \cdot B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B \setminus A) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A / B)$$

Примеры решения задач:

Задание 1.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{C_x^y}{C_x^2} = \dfrac{C_x^{y+2}}{66} \end{cases}$$

1) $C_x^2 = 66$,

$$\frac{x\cdot(x-1)}{2!} = 66$$

$x^2 - x = 132$

$x^2 - x - 132 = 0$

$x_1 = 12$

$x_2 = -11 -$ посторонний корень

т.к. $x \rangle 2$.

2) используя формулу ($C_n^k = C_n^{n-k}$)

$C_{12}^{12-y} = C_{12}^{y+2}$, откуда

$12 - y = y + 2$,

$y = 5$

Ответ: $x = 12, y = 5$

Задание 2.

Решить уравнение $A_{n-2}^3 = 4A_{n-3}^2$

$\dfrac{(n-2)!}{(n-5)!} = 4\cdot\dfrac{(n-3)!}{(n-5)!}$ откуда $n-2=4,\ n=6.$

Задание 3.

В урне 12 белых и 8 черных шаров. Вынимают на удачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?

$C_{20}^2 = \dfrac{20!}{18!2!} = \dfrac{19\cdot 20}{2} = 190 -$ число возможных случаев сочетаний по два.

$C_8^2 = \dfrac{8!}{6!2!} = \dfrac{7\cdot 8}{2} = 28 -$ число возможных случаев появления двух черных шаров.

$\mathrm{P} = \dfrac{28}{190} = \dfrac{14}{95} = 0{,}147 -$ вероятность появления двух черных шаров.

Задание 4.

У продавца имеется 10 красных, 8 синих, 5 зеленых и 15 желтых шаров. Вычислить вероятность того, что купленный шар окажется красным, синим или зеленым.

Пусть событие $A -$ купленный шар красный

событие $B -$ купленный шар синий

событие $C -$ купленный шар зеленый.

$\mathrm{P}(A) = \dfrac{10}{38}, \mathrm{P}(B) = \dfrac{8}{38}, \mathrm{P}(C)\dfrac{5}{38}.$

Так как события A, B, C несовместны, то

$$\mathrm{P}(A+B+C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) = \frac{10}{38} + \frac{8}{38} + \frac{5}{38} = \frac{23}{38} \approx 0{,}605.$$

Задание 5.

В первой урне находятся 6 черных и 4 белых шара, во второй 5 черных и 7 белых шаров. Из каждой урны извлекают по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми?

Пусть событие A – из 1-ой урны извлечен белый шар, событие B – из 2-ой урны извлечен белый шар. Очевидно, события А и В независимы.

$$\mathrm{P}(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}, \ \mathrm{P}(B) = \frac{7}{12}.$$

$$\mathrm{P}(AB) = P(A) \cdot \mathrm{P}(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{12} = \frac{14}{60} = \frac{7}{30}.$$

4. Задания:

Вариант 1

1. Вычислить: $A_{10}^{4}, C_{15}^{13}, A_{7}^{3} + A_{6}^{3} + A_{5}^{3}.$
2. Решить уравнение: $C_{x}^{2} = 153$
3. В урне 7 белых и 5 черных шаров. Найти вероятность того, что

а) наудачу вынутый шар окажется черным;

б) два наудачу вынутых шара окажутся черными.

4. В одной урне находятся 4 белых и 8 черных шаров, а в другой 3 белых и 9 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба окажутся белыми

Вариант 2

1. Вычислить: $A_{5}^{8}, C_{12}^{9}, A_{5}^{2} \cdot A_{4}^{2} \cdot A_{3}^{2}.$
2. Решить уравнение: $C_{x}^{2} - 2 = 21$
3. В урне 9 синих и 13 зеленых шаров. Найти вероятность того, что

а) наудачу вынутый шар окажется зеленым;

б) два наудачу вынутых шара окажутся зелеными;

4. В одной урне находятся 4 белых и 8 черных шаров, а в другой 3 белых и 9 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба окажутся черными.

Вариант 3

1. Вычислить: $A_{12}^{5}, C_{8}^{3}, C_{6}^{4} + C_{5}^{0}.$
2. Решить уравнение: $A_{2x}^{3} = 14 \cdot A_{x}^{3}$
3. В урне 8 красных и 10 синих шаров. Найти вероятность того, что

а) наудачу вынутый шар окажется синим;

б) два наудачу вынутых шара окажутся синими;

4. В одной урне находятся 5 белых и 4 черных шаров, а в другой 6 белых и 8 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба окажутся белыми.

Вариант 4

1. Вычислить: $A_{10}^{3}, C_{12}^{8}, \dfrac{A_{6}^{5} + A_{6}^{4}}{A_{6}^{3}}$

2. Решить уравнение: $A_x^3 = 12x$

3. В урне 7 белых и 9 черных шаров. Найти вероятность того, что

а) наудачу вынутый шар окажется белым;

б) два наудачу вынутых шара окажутся белыми;

4. В одной урне находятся 5 белых и 4 черных шаров, а в другой 6 белых и 8 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба окажутся черными.

5. Порядок выполнения работы:

5.1. Изучить краткие теоретические сведения

5.2. Решить задания своего варианта

6. Содержание отчета:

6.1. Тема и цель занятия

6.2. Решение заданий

6.3. Ответы на контрольные вопросы

7. Контрольные вопросы:

1. Чему равна вероятность достоверного события?
2. Чему равна вероятность невозможного события?

Практическое занятие №10

Тема: Вычисление абсолютной и относительной погрешности приближенного числа. Учет погрешностей и правила действий с приближенными числами.

Цель занятия: научиться вычислять абсолютную и относительную погрешность, округлять числа. Научиться практически применять абсолютную и относительную погрешности.

2. Перечень справочной литературы:

2.1. Конспект

2.2. Башмаков М.И. Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия: Учебник для СПО.- М.: Академия, 2017*(Основное печатное издание – ОПИ 1.).*

2.3 Башмаков М.И. Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Сборник задач профильной направленности: Учебное пособие для СПО.- М.: Академия, 2018.- 208с. *(Основное печатное издание – ОПИ 2.).*

3. Краткие теоретические сведения:

x – точное значение, a – приближенное значение.

$|x-a| = \Delta x$ - абсолютная погрешность приближения.

Число Δx называют границей абсолютной погрешности приближенного числа a.

$x = a \pm \Delta x \Leftrightarrow a - \Delta x \le x \le a + \Delta x$

$\frac{|\Delta x|}{|a|} = \frac{|x-a|}{|a|}$ - относительная погрешность приближения.

Правило округления чисел с наименьшей погрешностью:

1) единицы младших разрядов отбрасываются;

2) число единиц данного разряда не меняется, если следующая цифра данной дроби меньше 5, и увеличивается на единицу, если следующая цифра больше или равна 5.

Погрешность суммы: граница абсолютной погрешности суммы приближенных значений равна сумме границ абсолютных погрешностей слагаемых, т.е. если $x \approx a$ с точностью до h_1, $y \approx в$ с точностью до h_2, то $x + y \approx a + в$ с точностью до $h = h_1 + h_2$.

Погрешность разности: граница абсолютной погрешности разности приближенных значений равна сумме границ абсолютных погрешностей уменьшаемого и вычитаемого, т.е. если $x \approx a$ с точностью до h_1, $y \approx в$ с точностью до h_2, то $x - y \approx a - в$ с точностью до $h = h_1 + h_2$.

Примеры решения задач:

Задание 1.

Даны приближенные значения числа: $x = \frac{2}{3}; a_1 = 0,6; a_2 = 0,66; a_3 = 0,67.$

Какое из этих трех приближений является лучшим?

$\Delta x_1 = \left|\frac{2}{3} - 0,6\right| = \frac{1}{15}$, $\Delta x_2 = \left|\frac{2}{3} - 0,66\right| = \frac{1}{150}$, $\Delta x_3 = \left|\frac{2}{3} - 0,67\right| = \frac{1}{300}$

Лучшим приближенным числа x является $a_3 = 0,67$.

Задание 2.

Граница абсолютной погрешности приближенного значения 386 числа x равна 0,5. Укажите границы, в которых заключено число x.

386 – 0,5 = 385,5; 386 + 0,5 = 386,5

$385,5 < x < 386,5$

Задание 3.

При измерении длины l и диаметра d получили:

$l = (10,0 \pm 0,1)$м, $d = (2,5 \pm 0,1)$мм.

Какое из этих измерений точнее?

Их относительные погрешности:

$\frac{0,1}{10} = 0,01$ и $\frac{0,1}{2,5} = 0,04$

Следовательно, измерение длины проводника выполнено точнее.

Задание 4.

Пусть x = 274,61. Выполнить округление до десятых, единиц, десятков и сотен (с наименьшей погрешностью).

Согласно правилу округления десятичных дробей имеем: 274,6; 275; 270; 300.

Ошибки этих округлений соответственно равны: 0,01; 0,39; 4,61; 25,39.

Задание 5.

Найти периметр треугольника ABC, если $|AB| = 63,4 \pm 0,1$,

$|BC| = 47,8 \pm 0,1$, $|AC| = 73,1 \pm 0,1$

$P = |AB| + |BC| + |AC|$

$P \approx 63,4 + 47,8 + 73,1 = 184,3$ с точностью до $h = 0,1 + 0,1 + 0,1 = 0,3$

$P = 184,3 \pm 0,3$

4. Задания:

4.1. Найти абсолютную и относительную погрешность приближенного значения a величины x.

Вариант 1

$x = \frac{5}{3}; a = 1,6$

Вариант 2

$x = -\frac{5}{3}; a = 1,66$

Вариант 3

$x = \frac{3}{11}; a = 0,273$

Вариант 4

$x = \frac{3}{11}; a = 0,2727$

4.2. Найти границы числа.

Вариант 1

Амперметр дает точность ± 0,02 А. При измерении силы тока получили 10,63 А. Укажите границы этого числа.

Вариант 2

Атомная масса водорода 1,0082 ± 0,005. Укажите границы этого числа.

Вариант 3

Атомная масса меди 63,44 ± 0,15. Укажите границы этого числа.

Вариант 4

Площадь квадрата равна 24,5 ± 0,3 см^2. Найти границы измерения площади квадрата.

4.3. Найти сумму приближенных значений чисел.

Вариант 1.

Электрическая цепь состоит из трех последовательно соединенных проводников с сопротивлениями:

$ч_1$= 4,8 ± 0,05 Ом,

$ч_2$= 6,25 ± 0,005 Ом,

$ч_3$= 7,725 ± 0,0005 Ом.

Вычислить общее сопротивление цепи по формуле $R= ч_1+ ч_2+ ч_3$

Вариант 2

В треугольнике ABC:

AB= 6,8 ± 0,05 см,

BC= 4,3 ± 0,05 см,

AC= 3,575 ± 0,005 см.

Найти периметр треугольника ABC.

Вариант 3

Показания трёх амперметров:

I_1= 6,8 ± 0,05 А,

I_2=4,3 ± 0,05 А,

I_3=3,575 ± 0,005 А.

Найти общую силу тока по формуле $I= I_1 + I_2 + I_3$

Вариант 4

Электрическая цепь состоит из трех последовательно соединенных проводников с сопротивлениями:

$ч_1$= 6,54 ± 0,005 Ом,

$ч_2$= 10,022 ± 0,0005 Ом,
$ч_3$= 15,46 ± 0,05 Ом.
Вычислить общее сопротивление цепи по формуле $R = ч_1 + ч_2 + ч_3$

5. Порядок выполнения работы:
5.1. Изучить краткие теоретические сведения.
5.2. Решить задания своего варианта.

6. Содержание отчета:
6.1. Тема и цель занятия
6.2. Решение заданий
6.3. Ответы на контрольные вопросы

7. Контрольные вопросы:
7.1. В чём состоит правило сложения и вычитания приближенных значений?
7.2. Что называется границей абсолютной погрешности?