

**МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ
«РОСТОВСКИЙ-НА-ДОНУ КОЛЛЕДЖ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ,
ИНФОРМАЦИОННЫХ И ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»
(ГБПОУ РО «РКРИПТ»)**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ
ПРАКТИЧЕСКИХ (ЛАБОРАТОРНЫХ) РАБОТ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

ЕН.01 МАТЕМАТИКА

Специальность:

11.02.16 Монтаж, техническое обслуживание и ремонт электронных приборов и устройств

Квалификация выпускника:

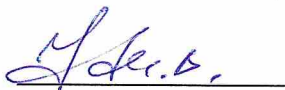
Специалист по электронным приборам и устройствам

Форма обучения: очная

Ростов-на-Дону
2023

СОГЛАСОВАНО

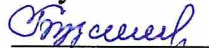
Начальник методического отдела

 Н.В. Вострякова
«28» марта 2023 г.

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель директора

по учебно-методической работе

 С.А. Будасова
«28» марта 2023 г.

ОДОБРЕНО

Цикловой комиссией

физико-математических

и общих естественнонаучных дисциплин

Пр. № 7 от «22» марта 2023 г.

Председатель ЦК

 О.Б. Петрикина

Методические указания по выполнению практических (лабораторных) работ разработаны в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины ЕН.01 Математика для специальности 11.02.16 Монтаж, техническое обслуживание и ремонт электронных приборов и устройств.

Разработчик(и):

Сельцина Н.В. – преподаватель высшей квалификационной категории ГБПОУ РО «РКРИПТ»

Рецензенты:

Кузнецова Е.О. –преподаватель высшей квалификационной категории ГБПОУ РО «РКРИПТ»

Степанец В.В. – преподаватель высшей квалификационной категории ГБПОУ РО «РКСИ»

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Практическое занятие №1	7
Практическое занятие №2	16
Практическое занятие №3	22
Практическое занятие №4	33
Практическое занятие №5	40
Практическое занятие №6	49
Практическое занятие №7	53
Практическое занятие №8	58
Практическое занятие №9	62
Практическое занятие №10	66

Введение

Лабораторные и практические занятия по учебной дисциплине ЕН.01 Математика

составляют важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки и направлены на подтверждение теоретических положений и формирование практических умений и практического опыта:

ОК.01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК.02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК. 03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях

ОК. 04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

ОК. 05 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста

ОК. 06 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных общечеловеческих ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения

ОК. 07 Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

ОК.08 Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности

ОК.09 Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках

Профессиональные компетенции:

ПК.1.1 Осуществлять сборку, монтаж и демонтаж электронных приборов и устройств в соответствии с требованиями технической документации.

ПК.1.2 Осуществлять сборку, монтаж и демонтаж электронных приборов и устройств и их настройку и регулировку в соответствии с требованиями технической документации и с учетом требований технических условий

Лабораторные и практические занятия относятся к основным видам учебных занятий.

Выполнение студентами лабораторных и практических работ направлено:

- на обобщение, систематизацию, углубление, закрепление

полученных теоретических знаний по конкретным темам дисциплин;

- формирование умений применять полученные знания на практике;

- реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;

- развитие интеллектуальных умений (аналитических, проектировочных, конструкторских и др.) у будущих специалистов;

- выработку при решении поставленных задач таких профессионально значимых качеств, как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Ведущей дидактической целью лабораторных занятий является экспериментальное подтверждение и проверка существенных теоретических положений (законов, зависимостей).

Ведущей дидактической целью практических занятий является формирование практических умений – профессиональных (выполнять определенные действия, операции, необходимые в последующем в профессиональной деятельности) или учебных (решать задачи по математике, физике, химии, информатике и др.), необходимых в последующей учебной деятельности.

Содержанием лабораторных работ по дисциплине /профессиональному модулю являются экспериментальная проверка формул, методик расчета, установление и подтверждение закономерностей, ознакомление с методиками проведения экспериментов, установление свойств веществ, их качественных и количественных характеристик, наблюдение развития явлений, процессов и др. В ходе выполнения заданий у студентов формируются практические умения и навыки обращения с различными приборами, установками, лабораторным оборудованием, аппаратурой, которые могут составлять часть профессиональной практической подготовки, а также исследовательские умения (наблюдать, сравнивать, анализировать, устанавливать зависимости, делать выводы и обобщения, самостоятельно вести исследование, оформлять результаты).

Содержанием практических занятий по дисциплине /профессиональному модулю являются решение разного рода задач, в том числе профессиональных (анализ производственных ситуаций, решение ситуационных производственных задач, выполнение профессиональных функций в деловых играх и т.п.), выполнение вычислений, расчетов, чертежей, работа с измерительными приборами, оборудованием, аппаратурой, работа с нормативными документами, инструктивными материалами, справочниками, составление проектной, плановой и другой технической и специальной документации и другое.

Содержание практических, лабораторных занятий охватывают весь круг профессиональных умений, на подготовку к которым ориентирована данная дисциплина/профессиональный модуль, которые в дальнейшем закрепляются и совершенствуются в процессе курсового проектирования, практикой по профилю специальности и преддипломной практикой.

Лабораторные занятия проводятся в специально оборудованных учебных лабораториях. Практическое занятие должно проводиться в учебных кабинетах или специально оборудованных помещениях (площадках). Продолжительность занятия – не менее 2-х академических часов. Необходимыми структурными элементами занятия, помимо самостоятельной деятельности студентов, являются инструктаж, проводимый преподавателем, а также организация обсуждения итогов выполнения работы.

Все студенты, связанные с работой в лаборатории, обязаны пройти инструктаж по безопасному выполнению работ, о чем расписываются в журнале инструктажа по технике безопасности.

Выполнению лабораторных и практических работ предшествует проверка знаний студентов, их теоретической готовности к выполнению задания.

Лабораторные и практические работы студенты выполняют под руководством преподавателя. При проведении лабораторных и практических занятий учебная группа может делиться на подгруппы численностью не менее 8 человек. Объем заданий для лабораторных и практических занятий спланирован с расчетом, чтобы за отведенное время они могли быть выполнены качественно большинством студентов.

Формы организации работы обучающихся на лабораторных работах и практических занятиях: фронтальная, групповая и индивидуальная.

При фронтальной форме организации занятий все студенты выполняют одновременно одну и ту же работу. При групповой форме организации занятий одна и та же работа выполняется бригадами по 2 - 5 человек. При индивидуальной форме организации занятий каждый студент выполняет индивидуальное задание.

Отчет по практической и лабораторной работе представляется в печатном виде в формате, предусмотренном шаблоном отчета по практической, лабораторной работе. Защита отчета проходит в форме доклада обучающегося по выполненной работе и ответов на вопросы преподавателя.

Оценки за выполнение лабораторных работ и практических занятий могут выставляться по пятибалльной системе или в форме зачета и учитываться как показатели текущей успеваемости студентов.

Критерии оценки лабораторных, практических работ.

Оценка «5» ставится, если учащийся выполняет работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности проведения опытов и измерений; самостоятельно и рационально монтирует необходимое оборудование; все опыты проводит в условиях и режимах, обеспечивающих получение правильных результатов и выводов; соблюдает требования правил безопасности труда; в отчете правильно и аккуратно выполняет все записи, таблицы, рисунки, чертежи, графики, вычисления; правильно выполняет анализ погрешностей.

Оценка «4» ставится, если выполнены требования к оценке «5», но было допущено два - три недочета, не более одной негрубой ошибки и одного недочёта.

Оценка «3» ставится, если работа выполнена не полностью, но объемом выполненной части таков, позволяет получить правильные результаты и выводы: если в ходе проведения опыта и измерений были допущены ошибки.

Оценка «2» ставится, если работа выполнена не полностью и объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов: если опыты, измерения, вычисления, наблюдения производились неправильно.

Практическое занятие №1

Тема: Действия над комплексными числами в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

Цель работы: получить практические навыки выполнения действий с комплексными числами в различных формах записи, нахождения модуля и аргумента комплексного числа, решения квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом.

1. Краткие теоретические сведения

Комплексным числом z называется выражение вида

$$z = x + iy,$$

где x, y - действительные числа, i - мнимая единица

$$i^2 = -1.$$

x - **действительная часть** комплексного числа ($\operatorname{Re} z$),

y - **мнимая часть** комплексного числа. ($\operatorname{Im} z$)

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются **равными**, если равны их действительные и мнимые части:

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2$$

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются **сопряженными**.

Запись комплексного числа

$$z = x + iy,$$

называется **алгебраической формой записи** комплексного числа z .

Действия с комплексными числами в алгебраической форме записи.

1. Сложение

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством:

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

2. Вычитание

Разностью двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число:

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

3. Умножение

Произведением комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число:

$$z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i$$

На практике, чтобы выполнить умножение комплексных чисел

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$

нужно раскрыть скобки, заменить $i^2 = -1$, а затем привести подобные слагаемые.

4. Деление

Частное двух комплексных чисел z_1 и $z_2 \neq 0$ находят по следующему правилу:

числитель и знаменатель дроби $\frac{z_1}{z_2}$ умножают на число $\bar{z}_2$, сопряженное

знаменателю, раскрывают скобки, заменяют $i^2 = -1$, приводят подобные слагаемые и почленно делят числитель на знаменатель.

Возведение в степень комплексного числа и извлечение корня n -ой степени из комплексного числа в алгебраической форме не выполняют.

Геометрическое изображение комплексного числа.

Комплексное число $z = x + iy$, изображают на координатной плоскости в виде радиус-вектора, конец которого имеет координаты $(x; y)$

Длина радиус-вектора называется **модулем комплексного числа**, обозначается r и вычисляется по формуле:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Угол, который радиус-вектор, изображающий комплексное число, образует с положительным направлением оси OX , называется **аргументом комплексного числа** и обозначается φ .

Аргумент комплексного числа удобно определять с помощью следующей таблицы:

Четверть, в которой находится радиус-вектор, изображающий комплексное число	Формула для определения аргумента
I	$\varphi = \varphi_0$
II, III	$\varphi = \varphi_0 + \pi$
IV	$\varphi = \varphi_0 + 2\pi$

где φ_0 определяют по формуле:

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Тригонометрическая форма записи комплексного числа:

$$z = r(\sin \varphi + i \cos \varphi)$$

Показательная форма записи комплексного числа:

$$z = r \cdot e^{i\varphi}$$

Действия с комплексными числами в тригонометрической и показательной формах записи:

Действие	Тригонометрическая форма записи $z_1 = r_1(\sin \varphi_1 + i \cos \varphi_1)$ $z_2 = r_2(\sin \varphi_2 + i \cos \varphi_2)$	Показательная форма записи $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$ $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$
Умножение		

	$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$	$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
Деление	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$
Возведение в целую степень	$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$	$z^n = r^n e^{in\varphi}$
Извлечение корня n-ой степени	$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),$ $k = 0 \div (n-1)$	$z_k = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}},$ $k = 0 \div (n-1)$

2. Методика решения типовых задач

2.1 Пример 1. Выполнить действия в алгебраической форме

$$\frac{(7 - 5i)(6 + 7i)}{(1 - 3i) + (3 - i)}.$$

Решение. В числителе дроби раскроем скобки, а в знаменателе выполним сложение комплексных чисел, сложив соответственно действительные и мнимые части:

$$\frac{(7 - 5i)(6 + 7i)}{(1 - 3i) + (3 - i)} = \frac{42 + 49i - 30i - 35i^2}{4 - 4i} = \frac{42 + 35 + 19i}{4 - 4i} = \frac{77 + 19i}{4 - 4i}.$$

Умножим теперь числитель и знаменатель дроби на выражение $4 + 4i$, сопряжённое знаменателю:

$$\frac{(77 + 19i) \cdot (4 + 4i)}{(4 - 4i) \cdot (4 + 4i)} = \frac{308 + 308i + 76i + 76i^2}{16 - 16i^2} = \frac{234 + 384i}{32} = \frac{117}{16} + 12i.$$

2.2 Пример 2. Даны числа $z_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i$. Выполнить в тригонометрической форме записи $z_1 \cdot z_2$, $\sqrt[3]{z_1}$, в показательной форме $\frac{z_1}{z_2}$, z_2^4 .

Решение. Найдём модули и аргументы чисел z_1 и z_2 :

$$r_1 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1.$$

$$r_2 = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Радиус-вектор, изображающий число z_1 находится в IV четверти, поэтому аргумент числа z_1 находим по формуле

$$\varphi_1 = \varphi_0 + 2\pi = \arctg \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} + 2\pi = -\arctg \sqrt{3} + 2\pi = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$$

Радиус-вектор, изображающий число z_2 находится в III четверти, поэтому аргумент числа z_2 находим по формуле

$$\varphi_2 = \varphi_0 + 2\pi = \arctg \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}} + \pi = \arctg 1 + \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$$

Запишем числа z_1 и z_2 в тригонометрической и показательной формах:

$$z_1 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}, \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

$$z_1 = e^{\frac{5\pi}{3}i}, \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{3} e^{\frac{5\pi}{4}i}.$$

Найдём $z_1 \cdot z_2$ (см. таблицу):

$$z_1 z_2 = \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\cos \left(\frac{5\pi}{3} + \frac{5\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{3} + \frac{5\pi}{4} \right) \right) = \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\cos \frac{35\pi}{12} + i \sin \frac{35\pi}{12} \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right)$$

Найдём $\sqrt[3]{z_1}$ (см. таблицу):

$$k = 0, \quad z_{1,0} = \cos \frac{5\pi}{9} + i \sin \frac{5\pi}{9}$$

$$k=1, \quad z_{1,1} = \cos \frac{\frac{5\pi}{3} + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{5\pi}{3} + 2\pi}{3} = \cos \frac{11\pi}{9} + i \sin \frac{11\pi}{9}$$

$$k=2, \quad z_{1,2} = \cos \frac{\frac{5\pi}{3} + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{5\pi}{3} + 4\pi}{3} = \cos \frac{17\pi}{9} + i \sin \frac{17\pi}{9}$$

Найдём $\frac{z_1}{z_2}$ (см. таблицу):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{3}} e^{i\left(\frac{5\pi}{3} - \frac{5\pi}{4}\right)} = \frac{3\sqrt{2}}{2} e^{\frac{5\pi}{12}i}$$

Найдём z_2^4 (см. таблицу):

$$z_2^4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^4 e^{4 \cdot \frac{5\pi}{4}i} = \frac{4}{81} e^{5\pi \cdot i} = \frac{4}{81} e^{\pi i}$$

2.3 Пример 3. Решить уравнение с отрицательным дискриминантом $x^2 + 4x + 13 = 0$.

Решение. Вычислим дискриминант квадратного уравнения:

$$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 13 = -36.$$

Представим

$$-36 = -1 \cdot 36 = 36 \cdot i^2$$

Воспользуемся формулой корней квадратного уравнения, получим

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{36i^2}}{2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i.$$

Таким образом, корнями квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом являются два комплексно сопряжённых числа. В данном случае

$$z_1 = -2 + 3i, \quad z_2 = -2 - 3i$$

3. Порядок выполнения практической работы

3.1 Изучить краткие теоретические сведения.

3.2 Решить задания своего варианта (Приложение)

3.3 Ответить на контрольные вопросы

4. Содержание отчёта

- 4.1 Тема и цель работы.
 4.2 Решение заданий.
 4.3 Ответы на контрольные вопросы.

5.Контрольные вопросы

- 5.1 Дайте определение комплексного числа.
 5.2 Что называется мнимой единицей?
 5.3 Как записывают комплексное число в алгебраической форме?
 5.4 Как выполняют сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел в алгебраической форме записи?
 5.5 Как геометрически изображают комплексное число?
 5.6 Что называется модулем и аргументом комплексного числа? Запишите формулу вычисления модуля и аргумента.
 5.7 Как записывают комплексное число в тригонометрической форме, в показательной форме?
 5.8 Как выполняют умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня целой степени в тригонометрической и показательной формах записи (запишите формулы)?

6.Список справочной литературы

- 6.1 Богомолов Н.В., Самойленко П.И. Математика, Учебник. - М: Дрофа, 2016-395с.
 6.2 Конспект теоретических занятий.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВАРИАНТ №1	ВАРИАНТ №2
№1. Выполнить действия в алгебраической форме: $\frac{(2+i) \cdot (3-i)}{(2+3i) - (3+2i)}$	№1. Выполнить действия в алгебраической форме: $\frac{(4+i) \cdot (5+3i)}{(3+i) + (2+i)}$

№2. Даны числа $z_1 = -\frac{1}{7} + \frac{\sqrt{3}}{7}i$ и $z_2 = -\frac{3}{5} + \frac{\sqrt{3}}{5} \cdot i$. а) Записать числа z_1 и z_2 в тригонометрической и показательной формах, геометрически изобразить эти числа. б) Найти $z_1 \cdot z_2$ и $\frac{z_1}{z_2}$ в тригонометрической форме. с) Найти $\sqrt[3]{z_1}$ в показательной форме. №3. Решить уравнение: $x^2 - 2x + 5 = 0$	№2. Даны числа $z_1 = -\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}i$ и $z_2 = -1 - \sqrt{3} \cdot i$. а) Записать числа z_1 и z_2 в тригонометрической и показательной формах, геометрически изобразить эти числа. б) Выполнить действия в тригонометрической форме $\frac{z_1}{z_2}$, z_1^3. с) Выполнить действия в показательной форме $z_1 \cdot z_2$, $\sqrt[3]{z_2}$. №3. Решить уравнение: $x^2 - 8x + 25 = 0$
ВАРИАНТ №3	ВАРИАНТ №4
№1. Выполнить действия в алгебраической форме: $\frac{(3-i) \cdot (1-4i)}{(2-i) + (-2+2i)}$	№1. Выполнить действия в алгебраической форме: $\frac{(5-7i) \cdot (7+6i)}{(4-5i) - (3-4i)}$

№2. Даны числа $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ и $z_2 = -4 - 4\sqrt{3} \cdot i$. а) Записать числа z_1 и z_2 в тригонометрической и показательной формах, геометрически изобразить эти числа. б) Выполнить действия в тригонометрической форме $z_1 \cdot z_2$, $\sqrt[3]{z_1}$. с) Выполнить действия в показательной форме $\frac{z_2}{z_1}$, z_2^3. №3. Решить уравнение: $x^2 + 6x + 18 = 0$	№2. Даны числа $z_1 = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i$ и $z_2 = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot i$. а) Записать числа z_1 и z_2 в тригонометрической и показательной формах, геометрически изобразить эти числа. б) Выполнить действия в тригонометрической форме z_2^5, $\sqrt[4]{z_1}$. с) Выполнить действия в показательной форме $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 \cdot z_2$. №3. Решить уравнение: $x^2 + 8x + 17 = 0$
---	--

Практическое занятие №2

Тема: Дифференцирование элементарных и сложных функций. Решение практических задач с помощью производных.

Цель работы: получить практические навыки нахождения производных различных функций

1. Краткие теоретические сведения

Производной функции $y = y(x)$ называется предел отношения приращения функции (Δy) к приращению аргумента (Δx) , когда приращение аргумента стремится к нулю.

y' - обозначение производной функции $y = y(x)$.

Согласно определению

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Основные правила дифференцирования:

1. Производная постоянной величины.

$$C' = 0.$$

2. Производная суммы

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

3. Производная произведения.

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Следствие.

$$(cu)' = cu'.$$

4. Производная частного.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

5. Производная сложной функции

Сложной называется функция, у которой аргумент также является функцией.

Символически сложную функцию обозначают

$$y = y(f(x)),$$

где $f(x)$ - промежуточный аргумент сложной функции y .

При нахождении производной сложной функции используют **правило дифференцирования сложной функции** и **таблицей производных сложных функций**.

Правило дифференцирования сложной функции

$$y' = y_f' \cdot f_x'$$

Практическое правило: чтобы найти производную сложной функции её надо продифференцировать как простую, сохраняя аргумент и результат умножить на производную этого аргумента.

6. Таблица производных элементарных функций.

$$1. (x^n)' = nx^{n-1}, \text{ в частности } x' = 1, (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2},$$

$$(kx+b)' = k.$$

$$2. (a^x)' = a^x \cdot \ln a, \text{ в частности } (e^x)' = e^x.$$

$$3. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \text{ в частности } (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$4. (\sin x)' = \cos x.$$

$$5. (\cos x)' = -\sin x.$$

$$6. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$7. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$8. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$9. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$10. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$11. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

7. Таблица производных сложных функций

$$1. (u^n)' = nu^{n-1} \cdot u', \text{ в частности } (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}, \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2},$$

$$((ax+b)^n)' = an(ax+b)^{n-1}$$

$$2. (a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u', \text{ в частности } (e^u)' = e^u \cdot u'.$$

$$3. (\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}, \text{ в частности } (\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

$$4. (\sin u)' = \cos u \cdot u'.$$

$$5. (\cos u)' = -\sin u \cdot u'.$$

$$6. (\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$7. (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}.$$

$$8. (\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$$

$$9. (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$10. (\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$11. (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$$

2. Методика решения типовых задач

2.1 Пример 1. Найти производную функции $y = 5x^3 - 3x^2 + \ln x$.

Решение. Применим последовательно правила дифференцирования производная суммы нескольких функций, вынесение постоянного множителя за знак производной и формулы из таблицы производных 2 и 4, получим:

$$\begin{aligned} y' &= (5x^3 - 3x^2 + \ln x)' = 5(x^3)' - 3(x^2)' + (\ln x)' = 5 \cdot 3x^{3-1} - 3 \cdot 2x^{2-1} + \frac{1}{x} = \\ &= 15x^2 - 6x + \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Пример 2. Найти производную функции $y = \sqrt{x} - \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x^2}$.

Решение. Представим каждое слагаемое в правой части уравнения функции в виде степени:

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{-\frac{2}{3}}, \quad \frac{1}{x^2} = x^{-2},$$

тогда

$$y' = \left(\sqrt{x} - \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x^2} \right)' =$$

$$\left(x^{\frac{1}{2}} - 5x^{-\frac{2}{3}} - x^{-2} \right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} - 5 \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) x^{-\frac{2}{3}-1} - (-2)x^{-2-1} =$$

$$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{10}{3}x^{-\frac{4}{3}} + 2x^{-3}$$

2.2 Пример 3. Найти производную функции $y = e^x \cdot \arctg x$.

Решение. Применим правило дифференцирования производная частного, получим:

$$y' = (e^x \cdot \arctg x)' = (e^x)' \cdot \arctg x + e^x \cdot (\arctg x)' = e^x \cdot \arctg x + e^x \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

2.3 Пример 4. Найти производную функции $y = \frac{\cos x}{9^x - 3x^2}$.

Решение. Применим правило дифференцирования производная частного:

$$y' = \left(\frac{\cos x}{9^x - 3x^2} \right)' = \frac{(\cos x)' \cdot (9^x - 3x^2) - \cos x \cdot (9^x - 3x^2)'}{(9^x - 3x^2)^2} =$$

$$= \frac{-\sin x \cdot (9^x - 3x^2) - \cos x \cdot (9^x \ln x - 6x)}{(9^x - 3x^2)^2}.$$

2.4 Пример 5. Найти производную функции $y = \sin^3 x$

Решение. Продифференцируем данную функцию как степенную с промежуточным аргументом $\sin x$, получим:

$$y' = 3\sin^2 x \cdot (\sin x)' = 3\sin^2 x \cdot \cos x.$$

Пример 6. Найти производную функции $y = \ln \cos x$.

Решение. Продифференцируем данную функцию как логарифмическую с промежуточным аргументом $\cos x$, получим:

$$y' = \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x.$$

Пример 7. Найти производную функции $y = \ln \sin \frac{x+2}{x}$.

Решение. Продифференцируем данную функцию как сложный логарифм, аргументом которого также является сложная функция синус:

$$y' = \left(\ln \sin \frac{x+2}{x} \right)' = \frac{1}{\sin \frac{x+2}{x}} \cdot \left(\sin \frac{x+2}{x} \right)' = \frac{1}{\sin \frac{x+2}{x}} \cdot \cos \frac{x+2}{x} \cdot \left(\frac{x+2}{x} \right)' =$$

$$= \operatorname{ctg} \frac{x+2}{x} \cdot \frac{(x+2)' \cdot x - (x+2) \cdot x'}{x^2} = \operatorname{ctg} \frac{x+2}{x} \cdot \frac{x - x - 2}{x^2} = -\frac{2}{x^2} \operatorname{ctg} \frac{x+2}{x}.$$

3. Порядок выполнения практической работы

- 3.1 Изучить краткие теоретические сведения.
- 3.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
- 3.3 Ответить на контрольные вопросы

4. Содержание отчёта

- 4.1 Тема и цель работы.
- 4.2 Решение заданий.
- 4.3 Ответы на контрольные вопросы.

5. Контрольные вопросы

- 5.1 Дайте определение производной функции
- 5.2 Сформулируйте правила дифференцирования.

6. Список справочной литературы

- 6.1 Алексеева Е.В. Дифференциальное исчисление функции одной переменной: учебное пособие для студентов 1-го и 2-го курса технических специальностей по разделу дисциплины «Математика»
- 6.2 Конспект теоретических занятий

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Найти производные следующих функций:

ВАРИАНТ №1	ВАРИАНТ №2
№1. $y = 5\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{3}{x^3} - \frac{4}{x}$	№1 $y = 6x^2 - \frac{5}{x^3} - \sqrt[3]{x^4} + \frac{9}{\sqrt{x}}$
№2. $y = \operatorname{arctg} x \cdot \ln 2x$	№2 $y = e^{-2x} \cdot \ln(3x + 4)$
№3. $y = \frac{\cos 8x}{\operatorname{ctg} x + 3x^2}$	№3. $y = \frac{x - \sin 4x}{\sqrt{x}}$
	№4. $y = \operatorname{arctg} 6x \cdot (e^{\operatorname{tg} x} + 2)$

№4. $y = (5x^2 + e^{3x}) \cdot \operatorname{arccctg} x$ №5. $y = \ln \frac{1 + \sin 3x}{1 - \sin 3x}$	№5. $y = \cos \ln(2x - x^2)$
ВАРИАНТ №3	ВАРИАНТ №4
№1. $y = 2\sqrt[4]{x} + 9x^2 - 5\sqrt[3]{x^2} + \frac{7}{x^2}$ №2. $y = \arccos x \cdot e^{-3x}$ №3. $y = \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin x + 5x}$ №4. $y = (2 + 3\arcsin 7x) \cdot (x^2 + \ln(x^2 + 1))$ №5. $y = \sin^2 \frac{1-x}{1+x}$	№1. $y = 5\sqrt{x} + 3\sqrt[4]{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}}$ №2. $y = \ln(2x + 1) \cdot \operatorname{arctg} x$ №3. $y = \frac{e^{2x} - 3}{\cos x}$ №4. $y = (2\arccos 3x + 5x^3) \cdot e^{\operatorname{tg} x}$ №5. $y = \ln \sin \frac{x+2}{x}$

2. Решить задачу

Вариант1.

Задача. Тело движется прямолинейно по закону $S = 2t^3 + t^2 - 4$. Найти значение скорости и ускорения в момент времени $t = 4$.

Вариант2.

Задача. Тело массой 10 кг движется прямолинейно по закону $S = 3t^2 + t + 4$. Найти кинетическую энергию тела $(E_k = \frac{mv^2}{2})$ через 4с. после начала движения.

Вариант3.

Задача. Сила тока изменяется в зависимости от времени t по закону $I = 0,4t^2$ (I – в амперах, t – в секундах). Найти скорость измерения силы тока в конце 8^{ой} секунды.

Вариант4.

Задача. Температура тела T изменяется в зависимости от времени t по закону

$T = 0,5t^2 - 2t$. С какой скоростью нагревается это тело в момент времени $t = 5^\circ$.

Практическое занятие №3

Тема: Нахождение неопределенного интеграла методами непосредственного интегрирования, подстановки и интегрирования по частям.

Цель работы: получить практические навыки нахождения неопределённых интегралов различными способами.

1.Краткие теоретические сведения

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на некотором промежутке X , если для всех значений x из этого промежутка выполняется

$$F'(x) = f(x).$$

Теорема.

Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке X , то функция

$$F(x) + C,$$

где C - произвольная постоянная, также является первообразной для $f(x)$ на этом же промежутке.

Определение.

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$, определённых на некотором промежутке, называется *неопределённым интегралом* от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается символом

$$\int f(x)dx.$$

Читается: «интеграл от эф от икс де икс».

По определению

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$f(x)$ - подынтегральная функция,

$f(x)dx$ - подынтегральное выражение,

x - переменная интегрирования,

$\int$ - знак неопределённого интеграла,

C - постоянная величина (константа).

Нахождение неопределённого интеграла по данной подынтегральной функции называется **интегрированием** этой функции.

Так как интегрирование представляет собой операцию, обратную дифференцированию, то для того чтобы проверить, правильно ли выполнено интегрирование, достаточно продифференцировать результат и получить при этом подынтегральную функцию.

Основные свойства неопределённого интеграла

- 1. Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции.**

$$\left(\int f(x)dx \right)' = f(x).$$

- 2. Дифференциал неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению.**

$$d\left(\int f(x)dx \right) = f(x)dx.$$

- 3. Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная.**

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

- 4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.**

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx.$$

- 5. Неопределённый интеграл от алгебраической суммы двух или более функций равен алгебраической сумме интегралов от каждой из этих функций.**

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Таблица простейших интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, где $n \neq -1$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, в частности, $\int e^x dx = e^x + C$
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$ $\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C$
6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$, $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
10. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a^2} \right| + C$.

Интегралы, содержащиеся в данной таблице, называются **табличными** интегралами.

Основные методы интегрирования.

Задача интегрирования принципиально труднее задачи дифференцирования. Так, например, таблица интегралов не исчерпывает даже основных элементарных функций, не говоря уже о сложных функциях.

Не существует также правил интегрирования произведения, частного, сложной и обратной функций.

Существуют лишь отдельные методы, позволяющие интегрировать отдельные классы подынтегральных функций, и выбор того или иного метода интегрирования зависит от вида подынтегральной функции.

Непосредственное интегрирование.

Непосредственное интегрирование - это такой способ интегрирования, при котором данный интеграл с помощью различных преобразований подынтегральной функции и свойств неопределённого интеграла сводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Метод замены переменной (способ подстановки).

Найти заданный неопределённый интеграл непосредственным интегрированием удаётся далеко не всегда, а иногда это сопряжено с большими трудностями. В таких случаях применяют другие способы интегрирования.

Одним из наиболее эффективных методов является **способ подстановки** или **замены переменной интегрирования**.

Сущность этого метода заключается в том, что путём введения новой переменной интегрирования удаётся свести заданный интеграл к новому интегралу, который сравнительно легко берётся непосредственно.

Алгоритм метода:

Пусть дан интеграл $\int f(x)dx$, который не является табличным.

1. Записываем уравнение замены

$$y = y(x),$$

где $y(x)$ - некоторая функция.

2. Находим дифференциал этой функции

$$dy = y'(x)dx.$$

3. Выражаем

$$dx = \frac{dy}{y'(x)}.$$

4. Подставим y и dy в данный интеграл:

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy.$$

Если замена выполнена правильно, то

$$\int g(y)dy$$

будет табличным.

5. Находим

$$\int g(y)dy = F(y) + C.$$

6. Чтобы получить окончательный ответ, вместо переменной y подставляем выражение $y(x)$:

$$\int f(x)dx = F(y(x)) + C.$$

Интегрирование по частям.

Интегрирование по частям – это, практически, формула интегрирования произведения двух функций.

Хорошо известна формула дифференциала произведения двух функций:

$$d(uv) = u dv + v du$$

Проинтегрировав обе части данного равенства, получим:

$$\int d(uv) = \int u dv + \int v du,$$

т.к.

$$\int d(uv) = uv,$$

то

$$uv = \int u dv + \int v du,$$

Откуда

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Последняя формула называется **формулой интегрирования по частям**.

Формула интегрирования по частям сводит нахождение интеграла $\int u dv$ к отысканию другого интеграла $\int v du$; её применение целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл либо проще исходного, либо подобен ему.

При этом в качестве u берётся функция, которую проще продифференцировать, а в качестве dv берётся та часть подынтегрального выражения, которую проще проинтегрировать. Иногда формулу интегрирования по частям приходится использовать несколько раз.

При применении формулы интегрирования по частям интегралы можно разбить на 3 основные группы:

1. В интегралах вида

$$\int P(x)e^{ax} dx, \quad \int P(x)\sin ax dx, \quad \int P(x)\cos ax dx,$$

где $P(x)$ - многочлен переменной x , a - число, полагают

$$u = P(x), \quad dv = \begin{cases} e^{ax} dx, \\ \sin ax dx, \\ \cos ax dx \end{cases}$$

2. В интегралах вида

$$\int P(x)\ln x dx, \quad \int P(x)\arcsin x dx, \quad \int P(x)\arccos x dx,$$

$$\int P(x) \arctg x dx, \quad \int P(x) \operatorname{arcctg} x dx$$

полагают

$$u = \begin{cases} \ln x, \\ \arcsin x, \\ \arccos x, \\ \arctg x, \\ \operatorname{arcctg} x \end{cases} \quad dv = P(x) dx$$

3. В интегралах вида

$$\int e^{ax} \sin bxdx, \quad \int e^{ax} \cos bxdx$$

за u принимают любую функцию, за dv соответственно оставшуюся часть подынтегрального выражения.

2. Методика решения типовых задач

2.1 Пример 1. Найти неопределённый интеграл $\int (5x^4 - 4x^2 + 3x - 1) dx$.

Решение. Применим свойство 5:

$$\int (5x^4 - 4x^2 + 3x - 1) dx = \int 5x^4 dx - 4 \int x^2 dx + \int 3x dx - \int dx$$

В первых трёх интегралах применим свойство 4, в четвёртом - свойство 3, а затем табличный интеграл 1, получим:

$$\begin{aligned} \int 5x^4 dx - 4 \int x^2 dx + \int 3x dx - \int dx &= 5 \int x^4 dx - 4 \int x^2 dx + 3 \int x dx - x = \\ &= 5 \cdot \frac{x^5}{5} - 4 \cdot \frac{x^3}{3} + 3 \cdot \frac{x^2}{2} - x + C = x^5 - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x + C \end{aligned}$$

Пример 2. Найти неопределённый интеграл $\int \left(5\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}} + 1 \right) dx$.

Решение. Используем свойства 5 и 4, а также преобразуем каждое слагаемое подынтегральной функции в степень, получим:

$$\begin{aligned} \int \left(5\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}} + 1 \right) dx &= 5 \int x^{\frac{2}{3}} dx - 3 \int x^{-2} dx - 2 \int x^{-\frac{4}{3}} dx + \int dx = \\ &= 5 \cdot \frac{3}{5} \cdot x^{\frac{5}{3}} - 3 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} - 2 \cdot (-3) \cdot x^{\frac{1}{3}} + x + C = 3\sqrt[3]{x^5} + \frac{3}{x} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}} + x + C \end{aligned}$$

Пример 3. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{3x^4 + 2x^2 - 3x + 7}{x^2} dx$.

Решение. Разделим почленно числитель дроби на знаменатель, получим

$$\int \frac{3x^4 + 2x^2 - 3x + 7}{x^2} dx = \int \left(3x^2 + 2 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2} \right) dx.$$

Применим свойство 5:

$$\begin{aligned} \int \left(3x^2 + 2 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2} \right) dx &= \int 3x^2 dx + \int 2 dx - \int \frac{3}{x} dx + \int \frac{7}{x^2} dx = \\ &= 3 \int x^2 dx + 2 \int dx - 3 \int \frac{dx}{x} + 7 \int x^{-2} dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 2x - 3 \ln|x| + 7 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + C = \\ &= x^3 + 2x - 3 \ln|x| - \frac{7}{x} + C \end{aligned}$$

Пример 4. Найти неопределённый интеграл $\int e^x \left(3 - \frac{e^{-x}}{2 \cos^2 x} \right) dx$.

Решение. Раскроем в подынтегральном выражении скобки и применим табличные интегралы 3 и 6, получим:

$$\int e^x \left(3 - \frac{e^{-x}}{2 \cos^2 x} \right) dx = 3 \int e^x dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos^2 x} = 3e^x - \frac{1}{2} \operatorname{tg} x + C.$$

Пример 5. Найти $\int \frac{dx}{4 + 3x^2}$.

Решение. Приведём данный интеграл к табличному интегралу 9:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{4 + 3x^2} &= \int \frac{dx}{3 \left(\frac{4}{3} + x^2 \right)} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 + x^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}x}{2} + C = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}x}{2} + C. \end{aligned}$$

2.2 Пример 1. Найти $\int e^{\frac{x}{2}} dx$.

Решение. Сделаем подстановку $x = 2t$, тогда $dx = 2dt$. Следовательно,

$$\int e^{\frac{x}{2}} dx = \int e^t \cdot 2dt = 2 \int e^t dt = 2e^t + C = 2e^{\frac{x}{2}} + C.$$

Пример 2. Найти $\int (3x - 5)^7 dx$.

Решение. Сделаем подстановку $t = 3x - 5$, тогда $dt = 3dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{3}$, следовательно,

$$\int (3x - 5)^7 dx = \frac{1}{3} \int t^7 dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^8}{8} + C = \frac{(3x - 5)^8}{24} + C.$$

Пример 3. Найти $\int x^2 (3 + 2x^3)^4 dx$

Решение. Сделаем подстановку $t = 3 + 2x^3$, тогда $dt = 6x^2 dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{dt}{6}$, следовательно,

$$\int x^2 (3 + 2x^3)^4 dx = \frac{1}{6} \int t^4 dt = \frac{1}{6} \cdot \frac{t^5}{5} + C = \frac{(3 + 2x^3)^5}{30} + C.$$

Пример 4. Найти $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1 + 2 \sin x}}$.

Решение. Подстановка $t = 1 + 2 \sin x$, тогда $dt = 2 \cos x dx \Rightarrow \cos x dx = \frac{dt}{2}$, получим

$$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1 + 2 \sin x}} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \cdot 2t^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{1 + 2 \sin x} + C.$$

Пример 5. Найти $\int \sin(4x + 3) dx$.

Решение. Сделаем подстановку $t = 4x + 3$, тогда $dt = 4dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{4}$, следовательно,

$$\int \sin(4x + 3) dx = \frac{1}{4} \int \sin t dt = -\frac{1}{4} \cos t + C = -\frac{1}{4} \cos(4x + 3) + C.$$

Пример 6. Найти $\int x^2 e^{x^3 - 2} dx$.

Решение. Сделаем подстановку $t = x^3 - 2$, тогда $dt = 3x^2 dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{dt}{3}$, следовательно,

$$\int x^2 e^{x^3 - 2} dx = \frac{1}{3} \int e^t dt = \frac{1}{3} e^t + C = \frac{1}{3} e^{x^3 - 2} + C.$$

2.3 Пример 1. Найти $\int (2x+1)e^{3x} dx$.

Решение. Данный интеграл относится к первой группе, поэтому

$$\int (2x+1)e^{3x} dx = \left[\begin{array}{l} u = 2x+1 \Rightarrow du = 2dx, \\ dv = e^{3x} dx \Rightarrow v = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right] = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{3} \int e^{3x} dx = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C.$$

Пример 2. Найти $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$.

Решение. Данный интеграл относится ко второй группе, поэтому положим

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, \quad dv = \frac{dx}{x^3} \Rightarrow v = -\frac{1}{2x^2}.$$

Тогда по формуле интегрирования по частям находим:

$$\int \frac{\ln x}{x^3} dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^3} + C.$$

Пример 3. Найти $\int (x-5)\cos x dx$.

Данный интеграл относится к первой группе, поэтому $u = x-5 \Rightarrow du = dx$, $dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x$, по формуле интегрирования по частям имеем

$$\int (x-5)\cos x dx = (x-5)\sin x - \int \sin x dx = (x-5)\sin x + \cos x + C.$$

3. Порядок выполнения практической работы

3.1 Изучить краткие теоретические сведения.

3.2 Решить задания своего варианта (Приложение)

3.3 Ответить на контрольные вопросы

4. Содержание отчёта

4.1 Тема и цель работы.

4.2 Решение заданий.

4.3 Ответы на контрольные вопросы.

5. Контрольные вопросы

- 5.1 Дайте определение первообразной функции.
- 5.2 Дайте определение неопределенного интеграла.
- 5.3 Сформулируйте свойства неопределенного интеграла.
- 5.4 В чем состоит метод замены переменного.
- 5.5 Сформулируйте правило нахождения неопределенного интеграла по частям.

6. Список справочной литературы

- 6.1 Богомолов Н.В., Самойленко П.И. Математика, Учебник. - М: Дрофа, 2016-395с.
- 6.2 Конспект теоретических занятий.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВАРИАНТ 1	ВАРИАНТ 2
№1. Вычислите интегралы функций: 1) $\int (\frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 8)dx$ 2) $\int \sqrt[4]{x^3} dx$ №2. Вычислить методом замены переменных: 1) $\int \sin^2 x \cdot \cos x dx$ 2) $\int 4x^3 \cdot (x^4 - 5)^7 dx$ 3) $\int \frac{e^x}{e^x - 3} dx$ №3. Вычислить, интегрируя по частям: 1) $\int x \cdot e^{-3x} dx$ 2) $\int (2x^2 - 4) \cdot e^{-4x} dx$	№1. Вычислите интегралы функций: 1) $\int x^2 \cdot (1 + 2x)dx$ 2) $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} dx$ №2. Вычислить методом замены переменных: 1) $\int \sqrt{3x + 5} dx$ 2) $\int \cos^7 x \cdot \sin x dx$ 3) $\int \frac{5 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$ №3. Вычислить, интегрируя по частям: 1) $\int \ln x \cdot (2x - 3) dx$ 2) $\int x^2 \cos 4x dx$

ВАРИАНТ 3	ВАРИАНТ 4
№1. Вычислите интегралы функций: 1) $\int (x^4 - 8x^3 + 4x) dx$ 2) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ №2. Вычислить методом замены переменных: 1) $\int \cos^4 x \cdot \sin x dx$ 2) $\int \frac{8x-2}{4x^2-2x} dx$ 3) $\int e^{3x^3} \cdot x^2 dx$ №3. Вычислить, интегрируя по частям: 1) $\int x 3^x dx$ 2) $\int (x^2 - 3) \cdot \cos \frac{x}{3} dx$	№1. Вычислите интегралы функций: 1) $\int (x + 3)^2 dx$ 2) $\int \frac{3}{4 \cdot \sqrt[4]{x}} dx$ №2. Вычислить методом замены переменных: 1) $\int \frac{1}{2x-9} dx$ 2) $\int e^{-\sin x} \cdot \cos x dx$ 3) $\int \frac{e^x}{7e^x-2} dx$ №3. Вычислить, интегрируя по частям: 1) $\int x \sin 8x dx$ 2) $\int (3x^2 + 2) \cdot \sin 5x dx$

Практическое занятие №4

Тема: Вычисление определенного интеграла с помощью формулы Ньютона-Лейбница, методами подстановки и интегрирования по частям.

Цель работы: получить практические навыки вычисления определенных интегралов по формуле Ньютона-Лейбница, методом замены и по частям.

1. Краткие теоретические сведения

Пусть на отрезке $[a; b]$ задана непрерывная функция $y = f(x) \geq 0$.

Фигура, ограниченная графиком функции $y = f(x)$, прямыми линиями, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ называется **криволинейной трапецией**.

Определение. Предел интегральной суммы $\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$ при $n \rightarrow \infty$ называется **определённым интегралом** от функции $y = f(x)$ и обозначается $\int_a^b f(x) dx$, т.е.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

a - нижний предел интегрирования,

b - верхний предел интегрирования,

$f(x)$ - подынтегральная функция,

$f(x) dx$ - подынтегральное выражение;

$[a; b]$ - отрезок интегрирования.

Из определения определённого интеграла вытекает его геометрический смысл: *определённый интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции.*

Свойства определённого интеграла.

Определённый интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определённых интегралов от каждого слагаемого.

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx$$

Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла.

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx .$$

При перестановке местами пределов интегрирования определённый интеграл меняет свой знак на противоположный.

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx .$$

Определённый интеграл с одинаковыми пределами равен нулю.

$$\int_a^a f(x)dx = 0 .$$

Отрезок интегрирования можно разбивать на части.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx ,$$

где $a < c < b$.

Формула Ньютона - Лейбница. Основные методы вычисления определённого интеграла.

$$\int_a^b f(x)dx$$

Вычисляют определённый интеграл по формуле Ньютона - Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) , y$$

где $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$.

Формула Ньютона - Лейбница применяется для вычисления определённого интеграла во всех случаях, когда может быть найдена первообразная функция $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$.

Для вычисления определённого интеграла от функции $f(x)$ по формуле Ньютона - Лейбница необходимо сначала найти первообразную $F(x)$, поэтому для вычисления определённого интеграла применяют те же приёмы, что и для нахождения неопределённого интеграла.

Замена переменной в определённом интеграле.

$$\int_a^b f(x)dx$$

При вычислении определённого интеграла $\int_a^b f(x)dx$ способом замены переменной данный интеграл с помощью подстановки $x = \varphi(t)$ или $t = \psi(x)$ преобразуется в другой определённый интеграл с новой переменной интегрирования t и являющийся табличным.

При этом старые пределы интегрирования $x_1 = a$ и $x_2 = b$ заменяются новыми пределы $t_1 = \psi(a)$, $t_2 = \psi(b)$.

Формула замены переменной в определённом интеграле выглядит следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

В данной формуле предполагается, что функции $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[t_1; t_2]$, а функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на отрезке $[t_1; t_2]$.

Замечание. В отличие от интегрирования методом замены переменной в неопределённом интеграле при таком же способе интегрирования в интеграле определённом к старой переменной интегрирования не возвращаются.

Интегрирование по частям в определённом интеграле.

Теорема. Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a; b]$, то имеет место формула интегрирования по частям в определённом интеграле

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Замечание 1. При вычислении определённого интеграла по частям используются те же рекомендации при выборе функции u и выражения dv , что и при применении данного метода для неопределённого интеграла.

Замечание 2. При вычислении определённого интеграла по частям пределы интегрирования не пересчитываются.

2. Методика решения типовых задач

2.1 Непосредственное интегрирование.

$$\int_1^2 5x^4 dx$$

Пример 1. Вычислить определённый интеграл $\int_1^2 5x^4 dx$.

Решение. Применяя свойство 2 определённого интеграла, табличный интеграл 1 и формулу Ньютона - Лейбница, имеем:

$$\int_1^2 5x^4 dx = 5 \int_1^2 x^4 dx = 5 \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_1^2 = x^5 \Big|_1^2 = 2^5 - 1^5 = 32 - 1 = 31$$

$$\int_0^4 \left(3x - e^{\frac{x}{4}} \right) dx$$

Пример 2. Вычислить $\int_0^4 \left(3x - e^{\frac{x}{4}} \right) dx$.

Решение. Последовательно применим свойства 1 и 2 определённого интеграла, табличный интеграл и формулу Ньютона - Лейбница, получим:

$$\int_0^4 \left(3x - e^{\frac{x}{4}} \right) dx = 3 \int_0^4 x dx - \int_0^4 e^{\frac{x}{4}} dx = \frac{3x^2}{2} \Big|_0^4 - 4e^{\frac{x}{4}} \Big|_0^4 = \frac{3 \cdot 4^2}{2} - 4 \cdot e^{\frac{4}{4}} + 4e^{\frac{0}{4}} = 28 - 4e$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1 - x \sin x}{x} dx$$

Пример 3. Вычислить $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1 - x \sin x}{x} dx$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию, разделив почленно числитель на знаменатель, применим свойство определённого интеграла 1 и табличные интегралы, получим

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1 - x \sin x}{x} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{x} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx = \ln x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \cos x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \ln \pi - \ln \frac{\pi}{2} +$$

$$\cos \pi - \cos \frac{\pi}{2} = \ln 2 - 1$$

а. Замена переменного:

Пример 4. Вычислить $\int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{1+3x}}$.

$$t = \sqrt{1+3x} \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{3}, \quad dx = \frac{2t}{3} dt$$

Решение. Сделаем замену
Пересчитаем пределы интегрирования:

$$t_1 = \sqrt{1+3 \cdot 0} = 1, \quad t_2 = \sqrt{1+3 \cdot 5} = 4,$$

получаем

$$\begin{aligned} \int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{1+3x}} &= \int_1^4 \frac{\frac{t^2-1}{3} \cdot \frac{2t}{3} dt}{t} = \frac{2}{9} \int_1^4 (t^2-1) dt = \frac{2}{9} \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_1^4 = \frac{2}{9} \left(\frac{4^3}{3} - 4 \right) - \\ &\frac{2}{9} \left(\frac{1^3}{3} - 1 \right) = \frac{2}{9} \cdot \frac{52}{3} + \frac{4}{27} = \frac{108}{27} = 4 \end{aligned}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1+tgx}}{\cos^2 x} dx$$

Пример 5. Вычислить .

$$t = 1 + tgx \Rightarrow dt = (1 + tgx)' dx = \frac{dx}{\cos^2 x} \quad \text{и}$$

Решение. Сделаем замену
найдем новые пределы интегрирования

$$t_1 = 1 + tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1 - 1 = 0, \quad t_2 = 1 + tg\frac{\pi}{4} = 1 + 1 = 2$$

тогда получим

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1+tgx}}{\cos^2 x} dx = \int_0^2 \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{2}{3} \sqrt{2^3} - 0 = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

б. Интегрирование по частям:

$$\int_1^e x \ln x dx$$

Пример 8. Вычислить .

Решение. Данный интеграл относится ко второй группе, поэтому положим

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, \quad dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}, \quad \text{тогда имеем:}$$

$$\int_1^e x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x^2 \cdot \frac{dx}{x} = \frac{e^2}{2} \ln e - \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2 + 1).$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2-x) \sin 3x dx$$

Пример 9. Вычислить .

Решение. Данный интеграл относится к первой группе интегралов, поэтому

примем $u = 2 - x \Rightarrow du = -dx, \quad dv = \sin 3x dx \Rightarrow v = -\frac{1}{3} \cos 3x$,
тогда получим:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2-x) \sin 3x dx = -\frac{1}{3} (2-x) \cos 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx = -\frac{1}{3} \left(2 - \frac{\pi}{6} \right) \cos \frac{\pi}{2} +$$

$$\frac{1}{3} (2-0) \cos 0 - \frac{1}{9} \sin 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = 0 + \frac{2}{3} - \frac{1}{9} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{9} \sin 0 = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

3. Порядок выполнения практической работы

- 3.1 Изучить краткие теоретические сведения.
- 3.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
- 3.3 Ответить на контрольные вопросы

4. Содержание отчёта

- 4.1 Тема и цель работы.
- 4.2 Решение заданий.
- 4.3 Ответы на контрольные вопросы.

5. Контрольные вопросы

- 5.1 Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
- 5.2 Запишите свойства определенного интеграла.
- 5.3 Запишите формулу для вычисления определенного интеграла по частям.

6.Список справочной литературы

6.1 Богомолов Н.В., Самойленко П.И. Математика, Учебник. - М: Дрофа, 2016-395с.

6.2 Конспект теоретических занятий.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВАРИАНТ №1	ВАРИАНТ №2
№1. Вычислить интегралы: а) $\int_{-1}^1 (6x^2 - 2x - 5)dx$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3\sin x + 1} \cos x dx$ в) $\int_1^e x^3 \ln x dx$	№1. Вычислить интегралы: а) $\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{3 - \cos x}$ в) $\int_0^5 x e^{-x} dx$
ВАРИАНТ №3	ВАРИАНТ №4
№1. Вычислить интегралы: а) $\int_{-1}^1 (2x - 3x^2)dx$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{2 + \sin x}$ в) $\int_1^{e^2} \sqrt{x} \ln x dx$	№1. Вычислить интегралы: а) $\int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$ б) $\int_0^1 (e^x - 4)^4 e^x dx$ в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$

Практическое занятие №5

Тема: Применение определенного интеграла к решению геометрических и физических задач.

Цель работы: получить практические навыки вычисления площадей плоских фигур и объемов тел вращения.

1. Краткие теоретические сведения

Пусть на отрезке $[a; b]$ задана непрерывная функция $y = f(x) \geq 0$.

Фигура, ограниченная графиком функции $y = f(x)$, прямыми линиями, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ называется **криволинейной трапецией**.

Определение. Предел интегральной суммы $\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$ при $n \rightarrow \infty$ называется **определённым интегралом** от функции $y = f(x)$ и

обозначается $\int_a^b f(x) dx$, т.е.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

a - нижний предел интегрирования,

b - верхний предел интегрирования,

$f(x)$ - подынтегральная функция,

$f(x) dx$ - подынтегральное выражение;

$[a; b]$ - отрезок интегрирования.

Из определения определённого интеграла вытекает его геометрический смысл: *определённый интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции.*

Свойства определённого интеграла.

Определённый интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определённых интегралов от каждого слагаемого.

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx$$

Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла.

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx .$$

При перестановке местами пределов интегрирования определённый интеграл меняет свой знак на противоположный.

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx .$$

Определённый интеграл с одинаковыми пределами равен нулю.

$$\int_a^a f(x)dx = 0 .$$

Отрезок интегрирования можно разбивать на части.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx ,$$

где $a < c < b$.

Формула Ньютона - Лейбница. Основные методы вычисления определённого интеграла.

$$\int_a^b f(x)dx$$

Вычисляют определённый интеграл по формуле Ньютона - Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) , y$$

где $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$.

Формула Ньютона - Лейбница применяется для вычисления определённого интеграла во всех случаях, когда может быть найдена первообразная функция $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$.

Для вычисления определённого интеграла от функции $f(x)$ по формуле Ньютона - Лейбница необходимо сначала найти первообразную $F(x)$, поэтому для вычисления определённого интеграла применяют те же приёмы, что и для нахождения неопределённого интеграла.

Замена переменной в определённом интеграле.

$$\int_a^b f(x)dx$$

При вычислении определённого интеграла $\int_a^b f(x)dx$ способом замены переменной данный интеграл с помощью подстановки $x = \varphi(t)$ или $t = \psi(x)$ преобразуется в другой определённый интеграл с новой переменной интегрирования t и являющийся табличным.

При этом старые пределы интегрирования $x_1 = a$ и $x_2 = b$ заменяются новыми пределы $t_1 = \psi(a)$, $t_2 = \psi(b)$.

Формула замены переменной в определённом интеграле выглядит следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

В данной формуле предполагается, что функции $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[t_1; t_2]$, а функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на отрезке $[t_1; t_2]$.

Замечание. В отличие от интегрирования методом замены переменной в неопределённом интеграле при таком же способе интегрирования в интеграле определённом к старой переменной интегрирования не возвращаются.

Интегрирование по частям в определённом интеграле.

Теорема. Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a; b]$, то имеет место формула интегрирования по частям в определённом интеграле

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Замечание 1. При вычислении определённого интеграла по частям используются те же рекомендации при выборе функции u и выражения dv , что и при применении данного метода для неопределённого интеграла.

Замечание 2. При вычислении определённого интеграла по частям пределы интегрирования не пересчитываются.

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $y=f(x)$, двумя прямыми $x=a$ и $x=b$ и отрезком $a \leq x \leq b$ оси абсцисс, вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b f(x)dx, \text{ если } f(x) \geq 0 \text{ на отрезке от } a \text{ до } b.$$

$$S = -\int_a^b f(x)dx, \text{ если } f(x) \leq 0 \text{ на отрезке от } a \text{ до } b.$$

$$S = \int_a^b |f(x)|dx, \text{ если } f(x) \text{ конечное число раз меняет знак на отрезке от } a \text{ до } b.$$

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx, \text{ если площадь фигуры, ограничена двумя непрерывными}$$

кривыми $y=f(x)$ и $y=g(x)$ и двумя прямыми $x=a$ и $x=b$, где $f(x) \geq g(x)$ на отрезке от a до b .

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $y=f(x)$, осью абсцисс и двумя

прямыми $x=a$ и $x=b$ ($a < b$), находится по формуле: $V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$,

аналогично, **объем тела вращения вокруг оси Оу** криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $x=\varphi(y)$, осью ординат и двумя прямыми y

$=d$ и $y=c$ ($c < d$), находится по формуле: $V_y = \pi \int_c^d [\varphi(y)]^2 dy$,

2. Методика решения типовых задач

2.1 Непосредственное интегрирование.

$$\int_1^2 5x^4 dx$$

Пример 1. Вычислить определённый интеграл $\int_1^2 5x^4 dx$.

Решение. Применяя свойство 2 определённого интеграла, табличный интеграл 1 и формулу Ньютона - Лейбница, имеем:

$$\int_1^2 5x^4 dx = 5 \int_1^2 x^4 dx = 5 \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_1^2 = x^5 \Big|_1^2 = 2^5 - 1^5 = 32 - 1 = 31$$

$$\int_0^4 \left(3x - e^{\frac{x}{4}} \right) dx$$

Пример 2. Вычислить .

Решение. Последовательно применим свойства 1 и 2 определённого интеграла, табличный интеграл и формулу Ньютона - Лейбница, получим:

$$\int_0^4 \left(3x - e^{\frac{x}{4}} \right) dx = 3 \int_0^4 x dx - \int_0^4 e^{\frac{x}{4}} dx = \frac{3x^2}{2} \Big|_0^4 - 4e^{\frac{x}{4}} \Big|_0^4 = \frac{3 \cdot 4^2}{2} - 4 \cdot e^{\frac{4}{4}} + 4e^{\frac{0}{4}} = 28 - 4e$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1 - x \sin x}{x} dx$$

Пример 3. Вычислить .

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию, разделив почленно числитель на знаменатель, применим свойство определённого интеграла 1 и табличные интегралы, получим

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1 - x \sin x}{x} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{x} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx = \ln x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \cos x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \ln \pi - \ln \frac{\pi}{2} +$$

$$\cos \pi - \cos \frac{\pi}{2} = \ln 2 - 1$$

а. Замена переменного:

$$\int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{1+3x}}$$

Пример 4. Вычислить .

$$t = \sqrt{1+3x} \Rightarrow x = \frac{t^2 - 1}{3}, \quad dx = \frac{2t}{3} dt$$

Решение. Сделаем замену

Пересчитаем пределы интегрирования:

$$t_1 = \sqrt{1+3 \cdot 0} = 1, \quad t_2 = \sqrt{1+3 \cdot 5} = 4,$$

получаем

$$\begin{aligned} \int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{1+3x}} &= \int_1^4 \frac{\frac{t^2 - 1}{3} \cdot \frac{2t}{3} dt}{t} = \frac{2}{9} \int_1^4 (t^2 - 1) dt = \frac{2}{9} \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_1^4 = \frac{2}{9} \left(\frac{4^3}{3} - 4 \right) - \\ &\frac{2}{9} \left(\frac{1^3}{3} - 1 \right) = \frac{2}{9} \cdot \frac{52}{3} + \frac{4}{27} = \frac{108}{27} = 4 \end{aligned}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$$

Пример 5. Вычислить .

$$t = 1 + \operatorname{tg} x \Rightarrow dt = (1 + \operatorname{tg} x)' dx = \frac{dx}{\cos^2 x} \quad \text{и}$$

Решение. Сделаем замену
найдем новые пределы интегрирования

$$t_1 = 1 + \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1 - 1 = 0, \quad t_2 = 1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 + 1 = 2$$

тогда получим

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx = \int_0^2 \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{2}{3} \sqrt{2^3} - 0 = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

b. Интегрирование по частям:

$$\int_1^e x \ln x dx$$

Пример 8. Вычислить .

Решение. Данный интеграл относится ко второй группе, поэтому положим

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, \quad dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}, \quad \text{тогда имеем:}$$

$$\begin{aligned} \int_1^e x \ln x dx &= \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x^2 \cdot \frac{dx}{x} = \frac{e^2}{2} \ln e - \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2 + 1). \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2-x) \sin 3x dx$$

Пример 9. Вычислить .

Решение. Данный интеграл относится к первой группе интегралов, поэтому

$$u = 2 - x \Rightarrow du = -dx, \quad dv = \sin 3x dx \Rightarrow v = -\frac{1}{3} \cos 3x,$$

примем

тогда получим:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2-x) \sin 3x dx = -\frac{1}{3} (2-x) \cos 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx = -\frac{1}{3} \left(2 - \frac{\pi}{6}\right) \cos \frac{\pi}{2} +$$

$$\frac{1}{3}(2-0)\cos 0 - \frac{1}{9}\sin 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = 0 + \frac{2}{3} - \frac{1}{9}\sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{9}\sin 0 = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

2.4 Пример 10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

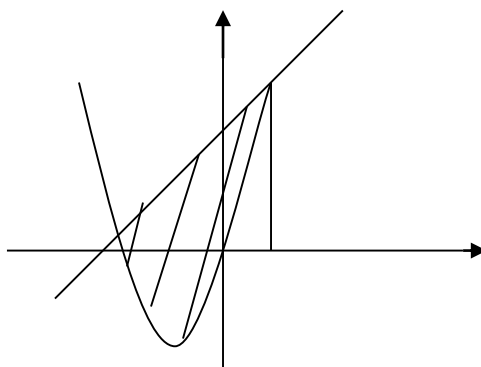
$$y = x^2 + 4x \quad y = x + 4$$

$$y = x + 4$$

Решение.

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x \\ y = x + 4 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -4, x_2 = 1$$

$$S = \int_{-4}^1 (x + 4 - x^2 - 4x) dx = \int_{-4}^1 (4 - 3x - x^2) dx = 4x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_{-4}^1 = \left(4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(-16 - \frac{48}{2} + \frac{64}{3}\right) = \frac{125}{6}$$



2.5 Пример 11. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $y = \frac{4}{x}$, прямыми $x=3$, $x=12$ и осью абсцисс.

Решение. Пользуясь формулой для вычисления объема, находим

$$V_x = \pi \int_3^{12} \left[\frac{4}{x} \right]^2 dx = 16\pi \int_3^{12} \frac{dx}{x^2} = -16\pi \frac{1}{x} \Big|_3^{12} = -16\pi \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{3} \right) = 4\pi \text{ (куб.ед.)}$$

3. Порядок выполнения практической работы

- 3.1 Изучить краткие теоретические сведения.
- 3.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
- 3.3 Ответить на контрольные вопросы

4. Содержание отчёта

- 4.1 Тема и цель работы.
- 4.2 Решение заданий.
- 4.3 Ответы на контрольные вопросы.

5. Контрольные вопросы

- 5.1 Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
 5.2 Запишите формулу для вычисления площади плоской фигуры при помощи определенного интеграла.
 5.3 Запишите формулу для вычисления объема тела вращения.

6.Список справочной литературы

- 6.1 Богомолов Н.В., Самойленко П.И. Математика, Учебник. - М: Дрофа, 2016-395с.
 6.2 Конспект теоретических занятий.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВАРИАНТ №1	ВАРИАНТ №2
№1. Вычислить интегралы: а) $\int_{-1}^1 (6x^2 - 2x - 5) dx$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3 \sin x + 1} \cos x dx$ в) $\int_1^e x^3 \ln x dx$ №2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. $y = 2x^2$, $y = 3x + 2$. Сделать чертеж. №3. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = \sqrt{x-2}$, прямыми $x=2$, $x=4$ и осью абсцисс. Сделать чертеж. №4 Вычислить путь, пройденный телом. $V = 3t^2 + 1$, $t_1 = 0$, $t_2 = 4$	№1. Вычислить интегралы: а) $\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{3 - \cos x}$ в) $\int_0^5 x e^{-x} dx$ №2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. $y = -x^2 - 2$, $y = -4x + 1$. Сделать чертеж. №3. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = \frac{3}{x}$, прямыми $x=3$, $x=6$ и осью абсцисс. Сделать чертеж. №4 Вычислить путь, пройденный телом. $V = 2t^2 + t$, $t_1 = 1$, $t_2 = 3$.

ВАРИАНТ №3	ВАРИАНТ №4
№1. Вычислить интегралы: а) $\int_{-1}^1 (2x - 3x^2) dx$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{2 + \sin x}$ в) $\int_1^{e^2} \sqrt{x} \ln x dx$ №2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. $y = x^2 - 5x$, $y = x - 5$. Сделать чертеж. №3. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = -\frac{2}{x}$, прямыми $x=1$, $x=2$ и осью абсцисс. Сделать чертеж. №4. Вычислить путь, пройденный телом. $V = 6t + 4$, $t_1 = 2$, $t_2 = 3$. .	№1. Вычислить интегралы: а) $\int_1^4 (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}) dx$ б) $\int_0^1 (e^x - 4)^4 e^x dx$ в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$ №2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. $y = x^2 + 6$, $y = -6x + 1$. Сделать чертеж. №3. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох криволинейной трапеции, ограниченной прямой $y = 3x - 1$, прямыми $x=1$, $x=3$ и осью абсцисс. Сделать чертеж. №4. Вычислить путь, пройденный телом. $V = t^2 - t + 3$, $t_1 = 0$, $t_2 = 5$.

Практическое занятие №6

Тема: Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными и линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Цель работы: сформировать навыки решения дифференциальных уравнений различных видов. Научиться находить общее и частное решение.

1. Краткие теоретические сведения.

1. Чтобы решить дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными ~~$f_1(x) = f_2(y)$~~ надо :

- разделить переменные

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{g_2(y)}{g_1(y)}$$

- взять интеграл от левой и правой части

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx = \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)} dy$$

При решении линейных уравнений используют метод вариации постоянной (смотри решение примеров)

2. Методика решения типовых задач.

2.1 Задача 1. Решить уравнение ~~$\cos x \cos y dx = \sin x \sin y dy$~~

Решение

$$\cos x \cos y dx = \sin x \sin y dy$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{\sin y}{\cos y} dy$$

$$\ln |\sin x| + c = -\ln |\cos y|$$

$$\ln |c * \sin x| = \ln |\cos y|^{-1}$$

$$\frac{1}{\cos y} = c * \sin x$$

~~$\cos$~~ $\frac{1}{c * \sin}$ - общее решение дифференциального уравнения.

2.2 Задача 2. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения

$$(1-y)dx = dy \quad \text{при } x = -2$$

Решение

$$\int \frac{dx}{1-x} = \int \frac{dy}{1-y}$$

$$-\ln|1-x| + c = \ln|1-y|$$

$$\ln|c| + \ln|x| = \ln|1-y|$$

$$\ln\left|\frac{c}{1-x}\right| = \ln|1-y|$$

$$1-y = \frac{c}{1-x} \quad \text{— общее решение дифференциального уравнения.}$$

Найдём «с»

$$1-2 = \frac{c}{1-(-2)} \Rightarrow c = -3$$

$$1-y = \frac{-3}{1-x} \quad \text{— частное решение дифференциального уравнения.}$$

2.3 Задача 3. Решить уравнение $y' = y \cdot \operatorname{ctg} x \cdot \frac{1}{\sin x}$

Решение.

Воспользуемся подстановкой

$$y = u \cdot v$$

$$y' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' - uv \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x}$$

$$v(u' - \operatorname{ctg} x \cdot u) + uv' = \frac{1}{\sin x}$$

$$\begin{cases} u' - \operatorname{ctg} x \cdot u = 0 \\ uv' = \frac{1}{\sin x} \end{cases}$$

$$1) u' - \operatorname{ctg} x \cdot u = 0$$

$$\frac{du}{u} = \operatorname{ctg} x \, dx$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$\ln|u| = \ln|\sin x|$$

$$u = \sin x$$

$$2) uv = \frac{1}{\sin x}$$

$$\sin x \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{1}{\sin x}$$

$$\int dv = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx$$

$$v = -\operatorname{ctg} x + c$$

$$y = \sin x (-\operatorname{ctg} x + c) \quad \text{— общее решение дифференциального уравнения.}$$

3.Порядок выполнения практической работы.

- 3.1 Изучить краткие теоретические сведения.
- 3.2 Решить задания своего варианта. (Приложение)
- 3.3 Ответить на контрольные вопросы.

4.Содержание отчёта

- 4.1 Тема и цель занятия.
- 4.2 Решение заданий.
- 4.3 Ответы на контрольные вопросы.

5.Контрольные вопросы

- 5.1 В чём состоит задача Коши?
- 5.2 Какая подстановка используется при решении линейных уравнений?

6.Список справочной литературы

- 6.1. Богомолов Н.В., Самойленко П.И. Математика. Учебник. - М: Дрофа, 2011-395с.
- 6.2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике. Учебное пособие. – М: Дрофа, 2011-204с.
- 6.3. Конспект лекций.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1 вариант

2 вариант

Решить дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} 1) y dx + (1+x) dy &= 0 \\ 2) (1+x^2) dy - 2xy dx &= 0 \\ 3) (1+xy) dx + (1-y) x dy &= 0 \end{aligned}$$

$y=1$ при $x=1$

$$4) y' - y = \frac{1+x^2}{x} \cdot e^x$$

$$5) y' - y \operatorname{ctg} x = \sin x$$

$$\begin{aligned} 1) y dx + (1-y) x dy &= 0 \\ 2) (1+x^2) dy + (xy-1) dx &= 0 \\ 3) y^2 dx + e^{x^2 dy} &= 0 \end{aligned}$$

$y=1$ при $x=0$

$$4) y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$$

$$5) y' + \frac{y}{x} = \frac{e^{-x}}{x}$$

3 вариант

4 вариант

Решить дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} 1) y dx + (1+y) dy &= 0 \\ 2) (1+y) dx + (x^2+y) dy &= 0 \\ 3) \cos y dy + \sin x dx &= 0 \end{aligned}$$

$y = \frac{\pi}{4}$ при $x = \frac{\pi}{4}$

$$4) y' - \frac{2y}{x} = -\frac{3}{x^2}$$

$$5) y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\begin{aligned} 1) y dx + (2+y) dy &= 0 \\ 2) (x-x^2) dx + (x+y) dy &= 0 \\ 3) (1+y) dy - 2 dx &= 0 \end{aligned}$$

$y=1$ при $x=1$

$$4) y' + \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$$

$$5) y' - \frac{2y}{x} = x^2 e^x$$

Практическое занятие №7

Тема: Решение линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Цель работы: получить практические навыки решения линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

1. Краткие теоретические сведения

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Линейными однородными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

где

a, b, c - числа, называемые коэффициентами уравнения,

y - неизвестная функция.

Чтобы решить уравнение

$$ay'' + by' + cy = 0$$

нужно составить и решить характеристическое уравнение

$$ak^2 + bk + c = 0.$$

Общее решение дифференциального уравнения строится в зависимости от корней характеристического уравнения, а именно:

1. Если корни характеристического уравнения действительны и различны $k_1 \neq k_2$ ($D > 0$), то общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x},$$

где

k_1, k_2 - корни характеристического уравнения,

C_1, C_2 - произвольные постоянные.

2. Если характеристическое уравнение имеет два одинаковых действительных корня $k_1 = k_2$ ($D = 0$), то решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = e^{kx}(C_1x + C_2).$$

3. Если корни характеристического уравнения являются комплексно сопряжёнными $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$ ($D < 0$), то общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

2. Методика решения типовых задач

2.1 Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y' - 2y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + k - 2 = 0$. Его корни $k_1 = -2$, $k_2 = 1$. Т.к. корни действительные и различные, то общее решение записывается в виде

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 4 = 0$ имеет равные корни

$$k_1 = k_2 = 2,$$

следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

Пример 3. Найти частное решение уравнения $y'' + 2y' + 5y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 1$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 2k + 5 = 0$ имеет комплексно-сопряжённые корни: $k_1 = -1 + 2i$, $k_2 = -1 - 2i$. Таким образом, общее решение записывается в виде

$$y = e^{-x}(A \cos 2x + B \sin 2x).$$

Найдём частное решение, которое удовлетворяет заданным начальным условиям. Из первого начального условия следует, что

$$0 = e^0(A \cos 0 + B \sin 0) \Rightarrow A \cos 0 = 0 \Rightarrow A = 0.$$

Найдём y' :

$$\begin{aligned} y' &= -e^{-x}(A \cos 2x + B \sin 2x) + e^{-x}(2B \cos 2x - 2A \sin 2x) = \\ &= e^{-x}(2B \cos 2x - 2A \sin 2x - A \cos 2x - B \sin 2x) = \\ &= e^{-x}((2B - A) \cos 2x + (-A - B) \sin 2x). \end{aligned}$$

и подставим во второе начальное условие, получим

$$1 = (2B - A) \cos 0 + (-2A - B) \sin 0,$$

откуда, учитывая, что $A = 0$, получим

$$2B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, искомое частное решение имеет вид

$$y = \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x.$$

Пример 4. Найти интегральную кривую дифференциального уравнения $y'' + 2y' + 2y = 0$, проходящую через точку $M(0;1)$ и касающуюся в этой точке прямой $y=x+1$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + 2k + 2 = 0$; его корни $x_1 = 1 + i$ и $x_2 = 1 - i$ являются комплексно-сопряжёнными, поэтому уравнение множества интегральных кривых запишется следующим образом

$$y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

Найдём уравнение искомой интегральной кривой, для чего в равенства

$$y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x), y' = e^{-x}((C_2 - C_1) \cos x + (C_2 + C_1) \sin x)$$

подставим значение $y=1$ и углового коэффициента касательной $y' = k = 1$ в точке $x=0$. В результате получим систему уравнений для определения постоянных C_1 и C_2 :

$$\begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 - C_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 1, \quad C_2 = 2.$$

Подставив эти значения в общее решение, получим уравнение искомой интегральной кривой

$$y = e^{-x}(\cos x + 2 \sin x).$$

3. Порядок выполнения практической работы

- 3.1 Изучить краткие теоретические сведения.
- 3.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
- 3.3 Ответить на контрольные вопросы

4. Содержание отчёта

- 4.1 Тема и цель работы.
- 4.2 Решение заданий.
- 4.3 Ответы на контрольные вопросы.

5. Контрольные вопросы

- 5.1 Дайте определение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
- 5.2 Что называется характеристическим уравнением?
- 5.3 Какие возможны случаи для решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?

6.Список справочной литературы

- 6.1 Богомолов Н.В., Самойленко П.И. Математика, Учебник. - М: Дрофа, 2016-395с.
- 6.2 Конспект теоретических занятий.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВАРИАНТ №1	ВАРИАНТ №2
№1. Найти общее решение дифференциальных уравнений: 1)$y'' - 7y' + 10y = 0$ 2)$y'' - 5y' = 0$ 3)$y'' - 9y = 0$ 4)$y'' - 8y' + 16y = 0$ 5)$y'' - 6y' + 25y = 0$	№1. Найти общее решение дифференциальных уравнений: 1)$y'' + y' - 6y = 0$ 2)$y'' + 3y' = 0$ 3)$y'' - 4y = 0$ 4)$y'' - 6y' + 9y = 0$ 5)$y'' - 2y' + 5y = 0$

№2. Найти частное решение дифференциального уравнения, отвечающее заданным начальным условиям: $y'' - 2y' - 3y = 0, y=8 \text{ при } x=0 \text{ и } y' = 0$	№2. Найти частное решение дифференциального уравнения, отвечающее заданным начальным условиям: $y'' + y' - 20y = 0, y = \frac{9}{5} \text{ при } x=0 \text{ и } y' = 0$
ВАРИАНТ №3	ВАРИАНТ №4
№1. Найти общее решение дифференциальных уравнений: 1) $y'' - 8y' + 15y = 0$ 2) $y'' - y' = 0$ 3) $y'' - 25y = 0$ 4) $y'' + 2y' + y = 0$ 5) $y'' - 4y' + 7y = 0$ №2. Найти частное решение дифференциального уравнения, отвечающее заданным начальным условиям: $y'' + 8y' + 16y = 0, y=1 \text{ при } x=0 \text{ и } y' = 1$	№1. Найти общее решение дифференциальных уравнений: 1) $y'' + 5y' + 6y = 0$ 2) $y'' + 2y' = 0$ 3) $y'' - y = 0$ 4) $y'' - 4y' + 4y = 0$ 5) $y'' - 6y' + 13y = 0$ №2. Найти частное решение дифференциального уравнения, отвечающее заданным начальным условиям: $y'' - 10y' + 25y = 0, y=2 \text{ при } x=0 \text{ и } y' = 8$

Практическое занятие №8

Тема: Исследование на сходимость рядов с положительными членами по признаку Даламбера и знакопеременных рядов по признаку Лейбница.

Цель работы: получить практические навыки использования признаков Даламбера, Коши, Лейбница для определения сходимости или расходимости числовых рядов.

1. Краткие теоретические сведения

Признак Даламбера:

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

Если $q > 1$, то ряд расходится.

Если $q < 1$, то ряд сходится.

Признак Коши (радикальный):

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$.

Если $q > 1$, то ряд расходится.

Если $q < 1$, то ряд сходится.

Признак Лейбница (для знакопередающего ряда):

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$

Ряд сходится, если выполняются два условия:

- 1) элементы ряда по абсолютной величине монотонно убывают;
- 2) предел общего члена ряда равен нулю.

Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad \text{или} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Чтобы найти интервал сходимости степенного ряда надо:

- 1) применить признак Даламбера или Коши к ряду, составленному из модулей;
- 2) исследовать сходимость ряда на концах интервала.

2. Методика решения типовых задач

2.1 Задача 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

Решение.

$$a_n = \frac{n}{3^n}, a_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3}$$

Т. к. $\frac{1}{3} < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ сходится по признаку Даламбера.

2.2 Задача 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$

Решение.

$$a_n = \frac{n!}{10^n}, a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{10^{n+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{10^{n+1}} \cdot \frac{10^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{10} = \infty$$

Т. к. $\infty > 1$, то ряд расходится по признаку Даламбера.

2.3 Задача 3. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \dots$$

Решение

$$a_n = \left(\frac{2n-1}{2^n} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2n-1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Т.к. $\frac{1}{2} < 1$, то ряд сходится по признаку Коши.

2.4 Задача 4. Пользуясь признаком Лейбница, исследовать на сходимость ряд

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots$$

Решение.

Так как члены данного ряда по абсолютной величине монотонно

убывают $1 > \frac{1}{2^2} > \frac{1}{5^2} > \dots$ и общий член ряда стремится к нулю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$, то в силу признака Лейбница ряд сходится.

2.5 Задача 5. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \dots$$

Решение.

а) Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$$

По признаку Даламбера этот ряд сходится, т.к.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1/(n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1$$

Таким образом ряд расходится абсолютно.

б) Ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда

$$1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \dots$$

- расходится как общегармонический (т.к. $\frac{1}{3} < 1$).

Следовательно, исходный ряд не является абсолютно сходящимся.

Исследуем его на условную сходимость.

Ряд $1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \dots$ сходится (по признаку Лейбница), так как

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} > \frac{1}{\sqrt[3]{3}} > \dots > \frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \dots$$

Итак, данный ряд сходится условно.

3. Порядок выполнения практической работы

- 3.1 Изучить краткие теоретические сведения.
- 3.2 Решить задания своего варианта (Приложение)
- 3.3 Ответить на контрольные вопросы

4. Содержание отчёта

- 4.1 Тема и цель работы.
- 4.2 Решение заданий.
- 4.3 Ответы на контрольные вопросы.

5. Контрольные вопросы

- 5.1 Какой признак применим для знакочередующихся рядов?

5.2 Какой ряд называется абсолютно сходящимся?

5.3 Какой ряд называется условно сходящимся?

6.Список справочной литературы

6.1 Богомолов Н.В., Самойленко П.И. Математика, Учебник. - М: Дрофа, 2016-395с.

6.2 Конспект теоретических занятий.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВАРИАНТ №1	ВАРИАНТ №2
№1.Исследовать на сходимость ряды $1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ $2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$ $3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$ $4) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{2^n}$	№1. Исследовать на сходимость ряды $1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$ $2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n^2}{5^n}$ $3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$ $4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2n+1}$
ВАРИАНТ №3	ВАРИАНТ №4
№1.Исследовать на сходимость ряды $1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2}$ $2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3 \cdot 2^n}$ $3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{n^2}$ $4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n}$	№1 Исследовать на сходимость ряды $1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{5^n}$ $2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$ $3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{4n-1} \right)^{n^2}$ $4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

Практическое занятие №9

Тема: Решение задач по теории вероятностей.

Цель занятия: отработать навык решения задач по данной теме.

2. Перечень справочной литературы:

2.1. Конспект

2.2. Башмаков М.И. Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия: Учебник для СПО.- М.: Академия, 2017(*Основное печатное издание – ОПИ 1.*).

2.3 Башмаков М.И. Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Сборник задач профильной направленности: Учебное пособие для СПО.- М.: Академия, 2018.- 208с. (*Основное печатное издание – ОПИ 2.*).

3. Краткие теоретические сведения:

1. Элементы комбинаторики.

Размещения – упорядоченные выборки k элементов из n ($k \leq n$)

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Перестановки – выборки, которые отличаются только порядком расположения элементов.

$$P_n = n! \quad (P_n = A_r^n)$$

Сочетания – неупорядоченные выборки k элементов из n элементов

$$(k \leq n). \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{или} \quad C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

Бином Ньютона: $(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + C_n^n a^0 b^n$, где C_n^k – биномиальные коэффициенты.

2. Элементы теории вероятности.

Пусть A – событие, его вероятность, $P(A) = \frac{m}{n}$, где m – число исходов благоприятствующих событию A , n – число всех исходов.

Если A и B несовместные события, то:

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

Если A и B – произвольные события, то:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Примеры решения задач:

Задание 1.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} C_x^y = \frac{C_x^{y+2}}{66} \\ C_x^2 = 66 \end{cases}$$

$$1) C_x^2 = 66,$$

$$\frac{x \cdot (x-1)}{2!} = 66$$

$$x^2 - x = 132$$

$$x^2 - x - 132 = 0$$

$$x_1 = 12$$

$$x_2 = -11 - \text{посторонний корень}$$

т.к. $x > 2$.

Ответ: $x = 12, y = 5$

$$2) \text{ используя формулу } (C_n^k = C_n^{n-k})$$

$$C_{12}^{12-y} = C_{12}^{y+2}, \text{ откуда}$$

$$12 - y = y + 2,$$

$$y = 5$$

Задание 2.

Решить уравнение $A_{n-2}^3 = 4A_{n-3}^2$

$$\frac{(n-2)!}{(n-5)!} = 4 \cdot \frac{(n-3)!}{(n-5)!} \text{ откуда } n-2 = 4, n = 6.$$

Задание 3.

В урне 12 белых и 8 черных шаров. Вынимают на удачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?

$$C_{20}^2 = \frac{20!}{18!2!} = \frac{19 \cdot 20}{2} = 190 - \text{число возможных случаев сочетаний по два.}$$

$$C_8^2 = \frac{8!}{6!2!} = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28 - \text{число возможных случаев появления двух черных шаров.}$$

$$P = \frac{28}{190} = \frac{14}{95} = 0,147 - \text{вероятность появления двух черных шаров.}$$

Задание 4.

У продавца имеется 10 красных, 8 синих, 5 зеленых и 15 желтых шаров. Вычислить вероятность того, что купленный шар окажется красным, синим или зеленым.

Пусть событие A – купленный шар красный

событие B – купленный шар синий

событие C – купленный шар зеленый.

$$P(A) = \frac{10}{38}, P(B) = \frac{8}{38}, P(C) = \frac{5}{38}.$$

Так как события A, B, C несовместны, то

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{10}{38} + \frac{8}{38} + \frac{5}{38} = \frac{23}{38} \approx 0,605.$$

Задание 5.

В первой урне находятся 6 черных и 4 белых шара, во второй 5 черных и 7 белых шаров. Из каждой урны извлекают по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми?

Пусть событие A – из 1-ой урны извлечен белый шар, событие B – из 2-ой урны извлечен белый шар. Очевидно, события A и B независимы.

$$P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}, \quad P(B) = \frac{7}{12}.$$

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{12} = \frac{14}{60} = \frac{7}{30}.$$

4. Задания:

Вариант 1

1. Вычислить: $A_{10}^4, C_{15}^{13}, A_7^3 + A_6^3 + A_5^3$.
2. Решить уравнение: $C_x^2 = 153$
3. В урне 7 белых и 5 черных шаров. Найти вероятность того, что
 - а) наудачу вынутый шар окажется черным;
 - б) два наудачу вынутых шара окажутся черными.
4. В одной урне находятся 4 белых и 8 черных шаров, а в другой 3 белых и 9 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба окажутся белыми

Вариант 2

1. Вычислить: $A_5^8, C_{12}^9, A_5^2 \cdot A_4^2 \cdot A_3^2$.
2. Решить уравнение: $C_x^2 - 2 = 21$
3. В урне 9 синих и 13 зеленых шаров. Найти вероятность того, что
 - а) наудачу вынутый шар окажется зеленым;
 - б) два наудачу вынутых шара окажутся зелеными;
4. В одной урне находятся 4 белых и 8 черных шаров, а в другой 3 белых и 9 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба окажутся черными.

Вариант 3

1. Вычислить: $A_{12}^5, C_8^3, C_6^4 + C_5^0$.
2. Решить уравнение: $A_{2x}^3 = 14 \cdot A_x^3$
3. В урне 8 красных и 10 синих шаров. Найти вероятность того, что
 - а) наудачу вынутый шар окажется синим;
 - б) два наудачу вынутых шара окажутся синими;
4. В одной урне находятся 5 белых и 4 черных шаров, а в другой 6 белых и 8 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба окажутся белыми.

Вариант 4

1. Вычислить: $A_{10}^3, C_{12}^8, \frac{A_6^5 + A_6^4}{A_6^3}$

2. Решить уравнение: $A_x^3 = 12x$
3. В урне 7 белых и 9 черных шаров. Найти вероятность того, что
 - а) наудачу вынутый шар окажется белым;
 - б) два наудачу вынутых шара окажутся белыми;
4. В одной урне находятся 5 белых и 4 черных шаров, а в другой 6 белых и 8 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба окажутся черными.

5. Порядок выполнения работы:

- 5.1. Изучить краткие теоретические сведения
- 5.2. Решить задания своего варианта

6. Содержание отчета:

- 6.1. Тема и цель занятия
- 6.2. Решение заданий
- 6.3. Ответы на контрольные вопросы

7. Контрольные вопросы:

1. Чему равна вероятность достоверного события?
2. Чему равна вероятность невозможного события?

Практическое занятие №10

Тема: Вычисление абсолютной и относительной погрешности приближенного числа. Учет погрешностей и правила действий с приближенными числами.

Цель занятия: научиться вычислять абсолютную и относительную погрешность, округлять числа. Научиться практически применять абсолютную и относительную погрешности.

2. Перечень справочной литературы:

2.1. Конспект

2.2. Башмаков М.И. Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия: Учебник для СПО.- М.: Академия, 2017(*Основное печатное издание – ОПИ 1.*).

2.3 Башмаков М.И. Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Сборник задач профильной направленности: Учебное пособие для СПО.- М.: Академия, 2018.- 208с. (*Основное печатное издание – ОПИ 2.*).

3. Краткие теоретические сведения:

x – точное значение, a – приближенное значение.

$|x - a| = \Delta x$ - абсолютная погрешность приближения.

Число Δx называют границей абсолютной погрешности приближенного числа a .

$$x = a \pm \Delta x \Leftrightarrow a - \Delta x \leq x \leq a + \Delta x$$

$$\frac{|\Delta x|}{|a|} = \frac{|x - a|}{|a|} - \text{относительная погрешность приближения.}$$

Правило округления чисел с наименьшей погрешностью:

- 1) единицы младших разрядов отбрасываются;
- 2) число единиц данного разряда не меняется, если следующая цифра данной дроби меньше 5, и увеличивается на единицу, если следующая цифра больше или равна 5.

Погрешность суммы: граница абсолютной погрешности суммы приближенных значений равна сумме границ абсолютных погрешностей слагаемых, т.е. если $x \approx a$ с точностью до h_1 , $y \approx b$ с точностью до h_2 , то $x + y \approx a + b$ с точностью до $h = h_1 + h_2$.

Погрешность разности: граница абсолютной погрешности разности приближенных значений равна сумме границ абсолютных погрешностей уменьшаемого и вычитаемого, т.е. если $x \approx a$ с точностью до h_1 , $y \approx b$ с точностью до h_2 , то $x - y \approx a - b$ с точностью до $h = h_1 + h_2$.

Примеры решения задач:

Задание 1.

Даны приближенные значения числа: $x = \frac{2}{3}$; $a_1 = 0,6$; $a_2 = 0,66$; $a_3 = 0,67$.

Какое из этих трех приближений является лучшим?

$$\Delta x_1 = \left| \frac{2}{3} - 0,6 \right| = \frac{1}{15}, \quad \Delta x_2 = \left| \frac{2}{3} - 0,66 \right| = \frac{1}{150}, \quad \Delta x_3 = \left| \frac{2}{3} - 0,67 \right| = \frac{1}{300}$$

Лучшим приближенным числом x является $a_3 = 0,67$.

Задание 2.

Граница абсолютной погрешности приближенного значения 386 числа x равна 0,5. Укажите границы, в которых заключено число x .

$$386 - 0,5 = 385,5; \quad 386 + 0,5 = 386,5$$

$$385,5 < x < 386,5$$

Задание 3.

При измерении длины l и диаметра d получили:

$$l = (10,0 \pm 0,1) \text{ м}, \quad d = (2,5 \pm 0,1) \text{ мм}.$$

Какое из этих измерений точнее?

Их относительные погрешности:

$$\frac{0,1}{10} = 0,01 \quad \text{и} \quad \frac{0,1}{2,5} = 0,04$$

Следовательно, измерение длины проводника выполнено точнее.

Задание 4.

Пусть $x = 274,61$. Выполнить округление до десятых, единиц, десятков и сотен (с наименьшей погрешностью).

Согласно правилу округления десятичных дробей имеем: 274,6; 275; 270; 300.

Ошибки этих округлений соответственно равны: 0,01; 0,39; 4,61; 25,39.

Задание 5.

Найти периметр треугольника ABC , если $|AB| = 63,4 \pm 0,1$,

$$|BC| = 47,8 \pm 0,1, \quad |AC| = 73,1 \pm 0,1$$

$$P = |AB| + |BC| + |AC|$$

$$P \approx 63,4 + 47,8 + 73,1 = 184,3 \text{ с точностью до } h = 0,1 + 0,1 + 0,1 = 0,3$$

$$P = 184,3 \pm 0,3$$

4. Задания:

4.1. Найти абсолютную и относительную погрешность приближенного значения a величины x .

Вариант 1

$$x = \frac{5}{3}; a = 1,6$$

Вариант 2

$$x = -\frac{5}{3}; a = 1,66$$

Вариант 3

$$x = \frac{3}{11}; a = 0,273$$

Вариант 4

$$x = \frac{3}{11}; a = 0,2727$$

4.2. Найти границы числа.

Вариант 1

Амперметр дает точность $\pm 0,02$ А. При измерении силы тока получили 10,63 А. Укажите границы этого числа.

Вариант 2

Атомная масса водорода $1,0082 \pm 0,005$. Укажите границы этого числа.

Вариант 3

Атомная масса меди $63,44 \pm 0,15$. Укажите границы этого числа.

Вариант 4

Площадь квадрата равна $24,5 \pm 0,3$ см². Найти границы измерения площади квадрата.

4.3. Найти сумму приближенных значений чисел.

Вариант 1.

Электрическая цепь состоит из трех последовательно соединенных проводников с сопротивлениями:

$$r_1 = 4,8 \pm 0,05 \text{ Ом},$$

$$r_2 = 6,25 \pm 0,005 \text{ Ом},$$

$$r_3 = 7,725 \pm 0,0005 \text{ Ом}.$$

Вычислить общее сопротивление цепи по формуле $R = r_1 + r_2 + r_3$

Вариант 2

В треугольнике ABC :

$$AB = 6,8 \pm 0,05 \text{ см},$$

$$BC = 4,3 \pm 0,05 \text{ см},$$

$$AC = 3,575 \pm 0,005 \text{ см}.$$

Найти периметр треугольника ABC .

Вариант 3

Показания трёх амперметров:

$$I_1 = 6,8 \pm 0,05 \text{ А},$$

$$I_2 = 4,3 \pm 0,05 \text{ А},$$

$$I_3 = 3,575 \pm 0,005 \text{ А}.$$

Найти общую силу тока по формуле $I = I_1 + I_2 + I_3$

Вариант 4

Электрическая цепь состоит из трех последовательно соединенных проводников с сопротивлениями:

$$r_1 = 6,54 \pm 0,005 \text{ Ом},$$

$$r_2 = 10,022 \pm 0,0005 \text{ Ом},$$

$$r_3 = 15,46 \pm 0,05 \text{ Ом}.$$

Вычислить общее сопротивление цепи по формуле $R = r_1 + r_2 + r_3$

5. Порядок выполнения работы:

5.1. Изучить краткие теоретические сведения.

5.2. Решить задания своего варианта.

6. Содержание отчета:

6.1. Тема и цель занятия

6.2. Решение заданий

6.3. Ответы на контрольные вопросы

7. Контрольные вопросы:

7.1. В чём состоит правило сложения и вычитания приближенных значений?

7.2. Что называется границей абсолютной погрешности?

